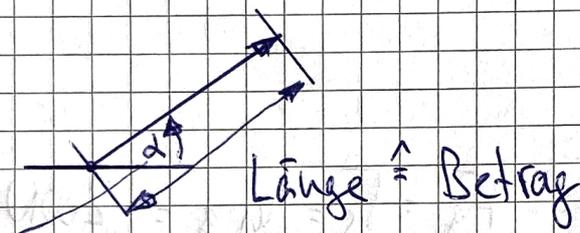


Wiederholung Kräfte aus Physik 11

- Bestimmung einer Resultierenden
- Zerlegung einer Kraft in ihre Komponenten

Kräfte sind gerichtete Größen (Vektoren), d.h. sie haben einen Betrag (Zahlenwert) und eine Richtung.



Winkel $\hat{=}$ Richtung

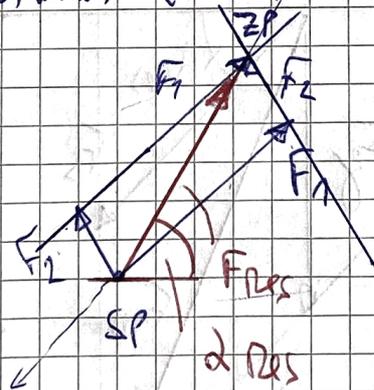
Kraftmaßstab:

$$\bullet \quad M_F = \frac{100 \text{ N}}{1 \text{ cm}}$$

$$\bullet \quad 100 \text{ N} \hat{=} 1 \text{ cm}$$

Kräfteaddition

\Rightarrow Parallelogramm ($\hat{=}$ Vektoraddition)



$$M_F = \frac{10}{1 \text{ cm}}$$

$$|F_{res}| = 3,3 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow |F_{res}| = 3,3 \text{ N}$$

$$\alpha_{res} = 61^\circ$$

Grundlagen der Statik

Anwendungsgebiet

An technischen Bauteilen greifen Belastungskräfte an, hervorgerufen durch:

- Lasten
- Eigengewicht
- Winddruck
- Gasdruck
- Zahnkräfte
- Riemenkräfte
- Zerspanungswiderstände
- Reibung

Mit den Verfahren der Statik werden die Stützkräfte ermittelt, die den Körper im Gleichgewicht halten. Die Ergebnisse der Statik sind die Grundlage der Festigkeitsberechnung

Definition und Grundlage

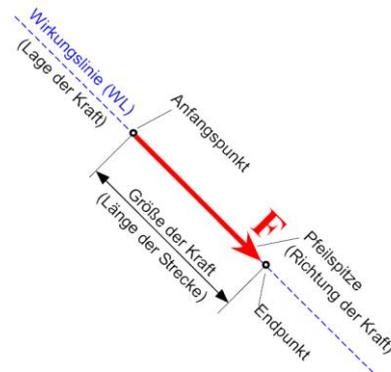
Die Statik ist die Lehre von den Kräften an Körpern, die sich im Gleichgewicht befinden.

Jeder Körper beharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, solange er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, diesen Zustand zu ändern.

Kraft

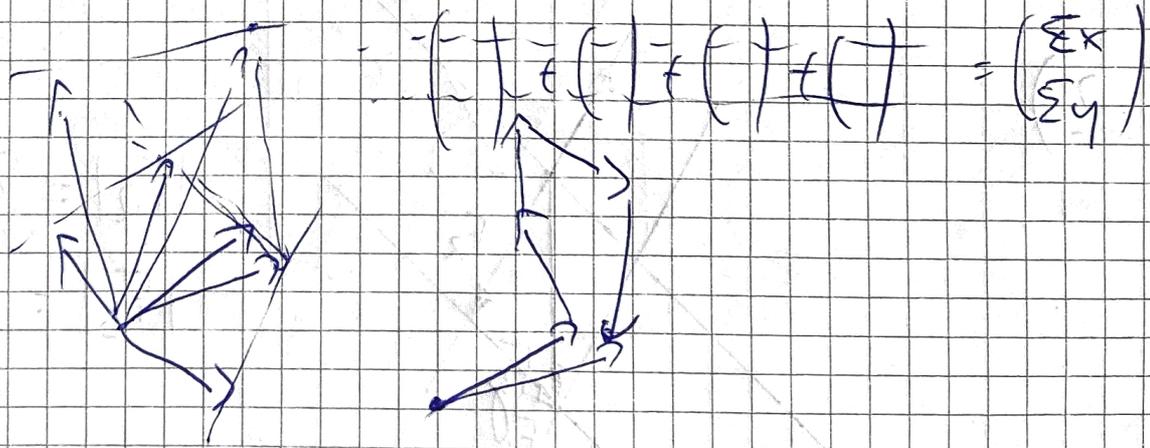
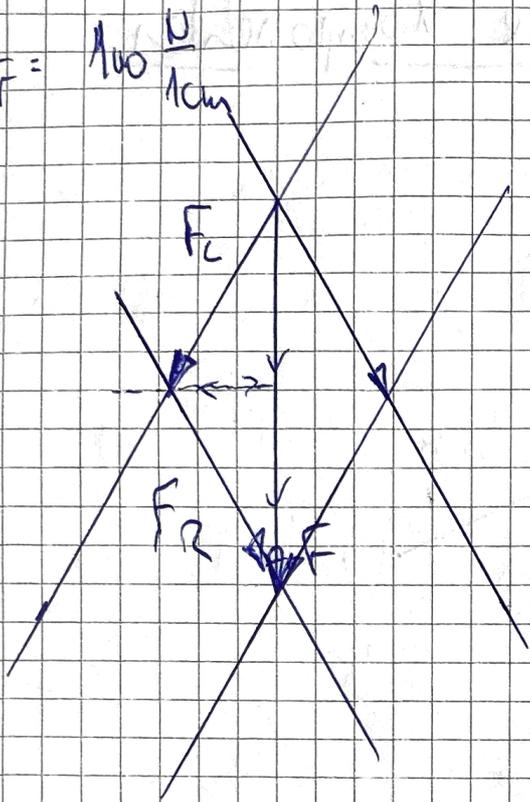
Größe, die den Bewegungszustand und/oder die Form eines Körpers ändert
Vollständige Beschreibung von Kräften durch :

- Angriffspunkt
- Betrag (Größe)
- Richtung und Richtungssinn



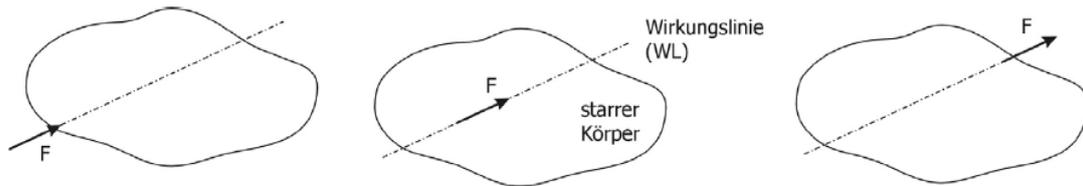
3) $\mu_F = 100 \frac{N}{10cm}$

$|F_L| = |F_R| = 280N$



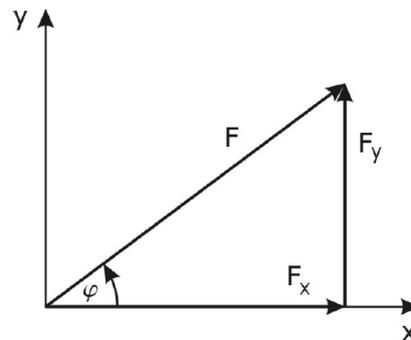
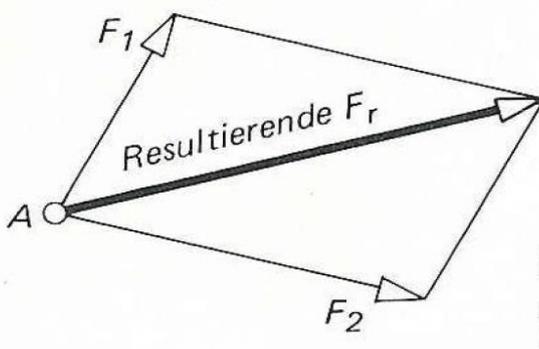
Verschiebungsaxiom

Zwei Kräfte, die den gleichen Betrag, die gleiche Wirkungslinie und den gleichen Richtungssinn, jedoch verschiedene Angriffspunkte haben, üben auf einen starren Körper die gleiche Wirkung aus, d.h. sie sind gleichwertig. Mit anderen Worten: Der Kraftvektor darf längs der Wirkungslinie verschoben werden



Parallelogrammaxiom

Die Wirkung zweier Kräfte F_1 und F_2 mit einem gemeinsamen Angriffspunkt ist gleichwertig der Wirkung einer einzigen Kraft F_{Res} , deren Vektor sich als Diagonale des mit den Vektoren F_1 und F_2 gebildeten Parallelogramms ergibt und den gleichen Angriffspunkt wie F_1 und F_2 hat.



$$F_x = |F| \cdot \cos(\varphi)$$

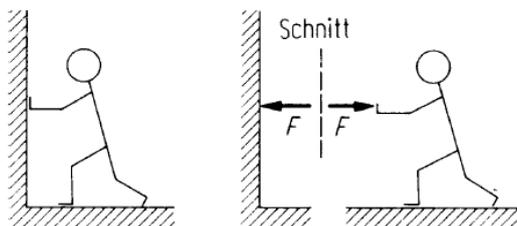
$$F_y = |F| \cdot \sin(\varphi)$$

$$\varphi = \arctan \frac{F_y}{F_x}$$

$$|F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

Wechselwirkungsgesetz

Wird von einem Körper auf einen zweiten eine Kraft ausgeübt (actio), so bedingt dies, dass der zweite Körper auf den ersten ebenfalls eine Kraft ausübt (reactio), die mit der ersten Kraft in Betrag und Wirkungslinie übereinstimmt, jedoch entgegengesetzt gerichtet ist.



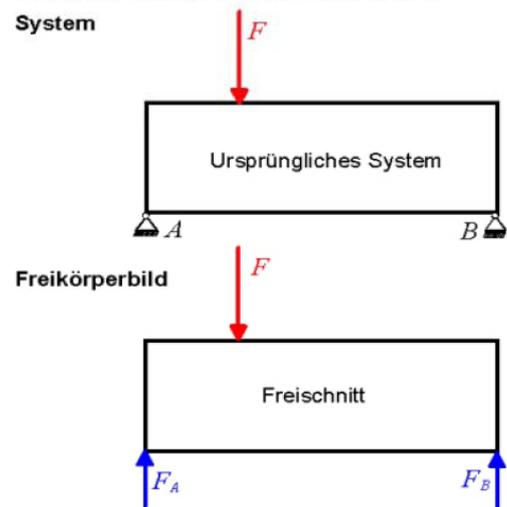
Actio = Reactio

Auflagerreaktionen

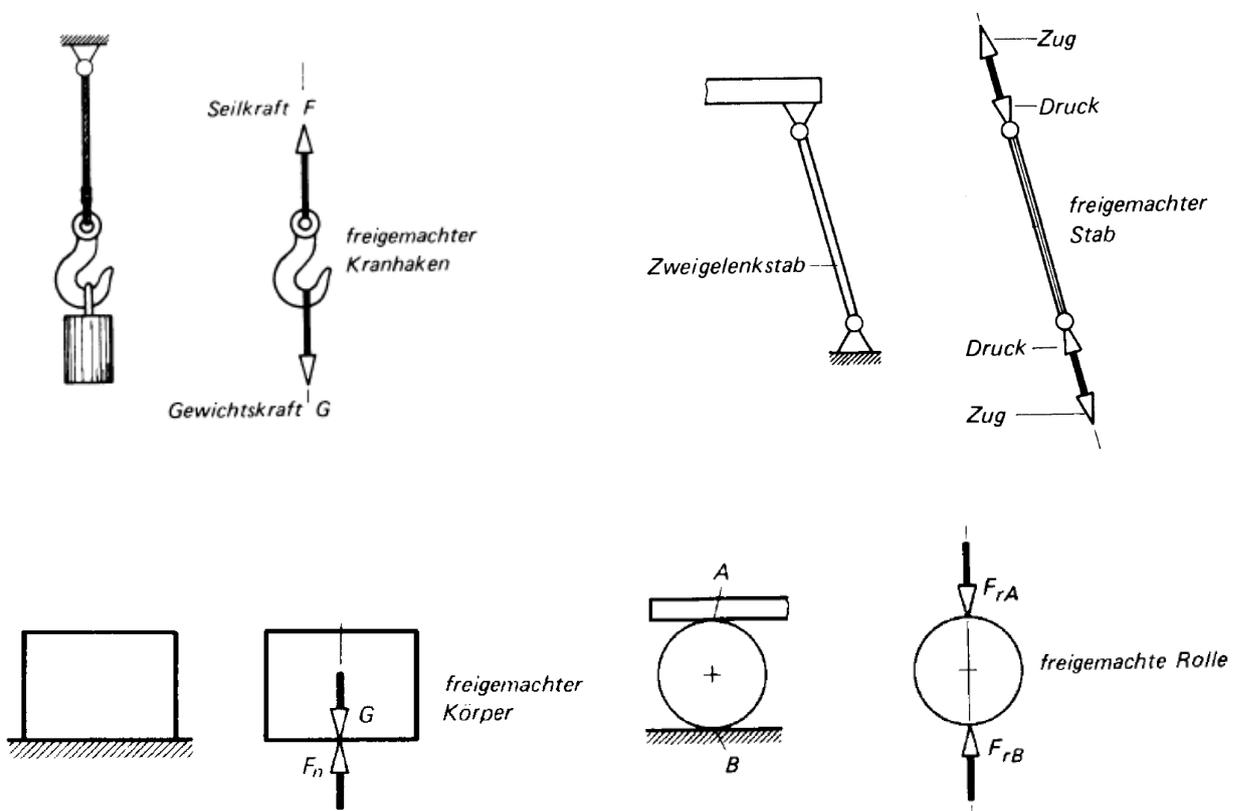
Kräfte, die infolge der Belastung eines Körpers z.B. durch Gewichts- oder Windkräfte an den Berührungsstellen des Körpers mit anderen Körpern auftreten und dadurch das Gleichgewicht aufrechterhalten, bezeichnet man als Auflagerkräfte oder Auflagerreaktionen.

Freimachen, Schnittmethode

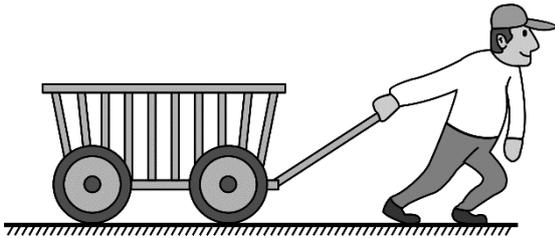
Um innere Kräfte zu ermitteln, grenzt man das mechanische System so ab, dass ein gedachter Schnitt durch die Stelle geführt wird, an der die innere Kraft bestimmt werden soll. Reaktionskräfte kann man sich nur veranschaulichen, indem man den Körper von seinen geometrischen Bindungen löst. Man nennt dies „Freimachen“ oder „Freischneiden“



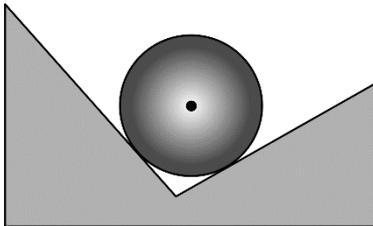
Beispiele für Freischnitte an Systemen



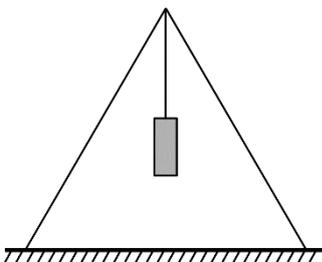
1. Ein Mann zieht, wie abgebildet, an einem Leiterwagen mit einer Kraft von 450 N. Konstruiere die Kraft, welche den Leiterwagen nach vorne zieht, und lies ihren Betrag ab. Maßstab: $100 \text{ N} \triangleq 1 \text{ cm}$
Was bewirkt die andere Kraftkomponente, welche bei dieser Kräftezerlegung entsteht? Lies auch ihren Betrag ab.



2. Eine Stahlkugel der Gewichtskraft 30 N liegt auf einer Schiene mit dem abgebildeten Profil (Winkel linke Ebene: 45° ; Winkel rechte Ebene: 30°). Bestimme durch eine entsprechende Konstruktion die Beträge der Druckkräfte auf die Schiene in den Berührungspunkten. Maßstab: $10 \text{ N} \triangleq 1 \text{ cm}$

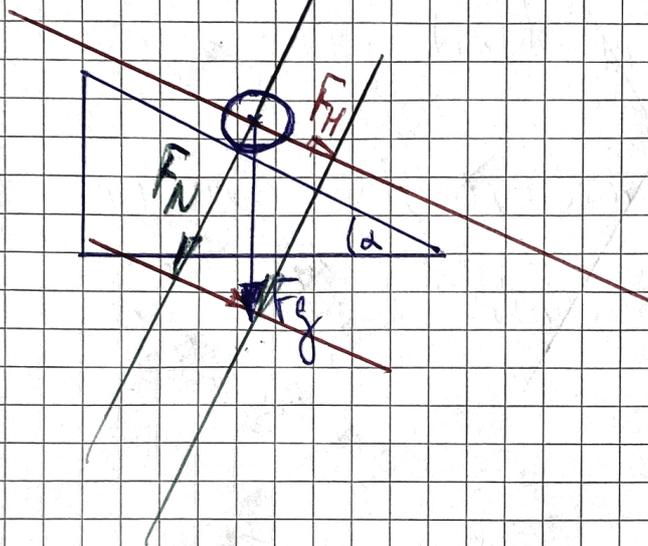


3. Eine Last (500 N) hängt an zwei gleich langen Stützen, die einen Winkel von 60° miteinander bilden. Bestimme durch Konstruktion die Beträge der Druckkräfte in den Stützen. Maßstab: $100 \text{ N} \triangleq 1 \text{ cm}$

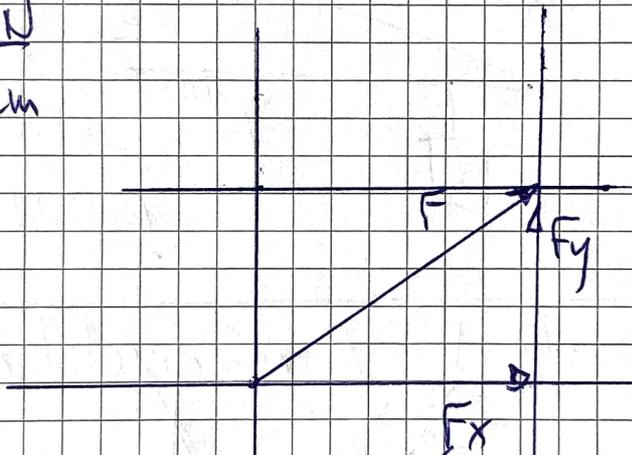


Zerlegen einer Kraft in ihre Komponenten

⇒ Schiefe Ebene



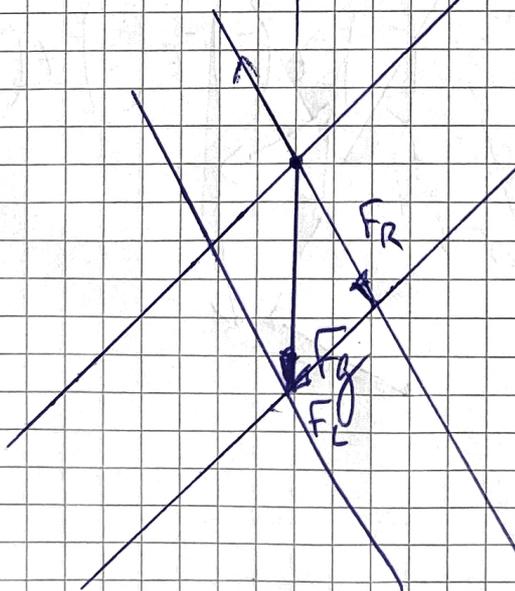
1) $M_F = \frac{100\text{N}}{1\text{cm}}$



$|F_x| = 370\text{N}$

$|F_y| = 250\text{N}$

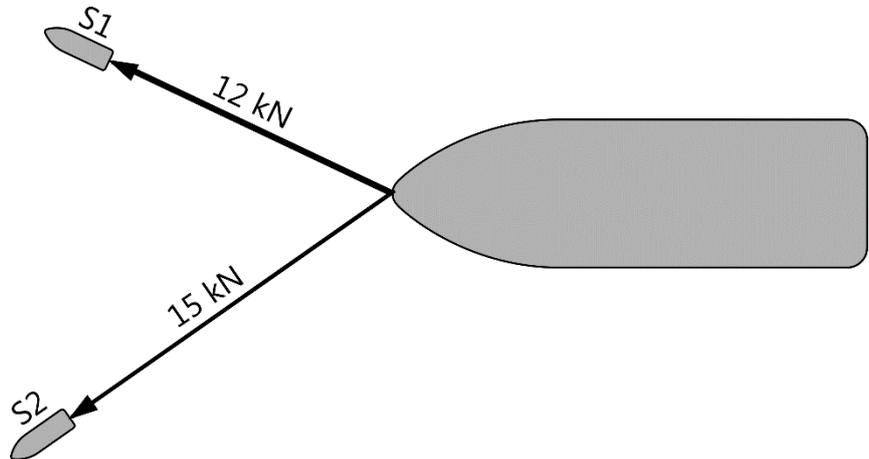
2)



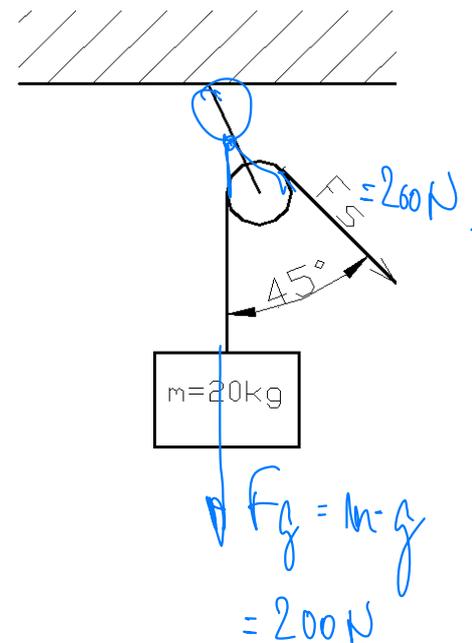
$|F_R| = 22\text{N}$

$|F_L| = 17\text{N}$

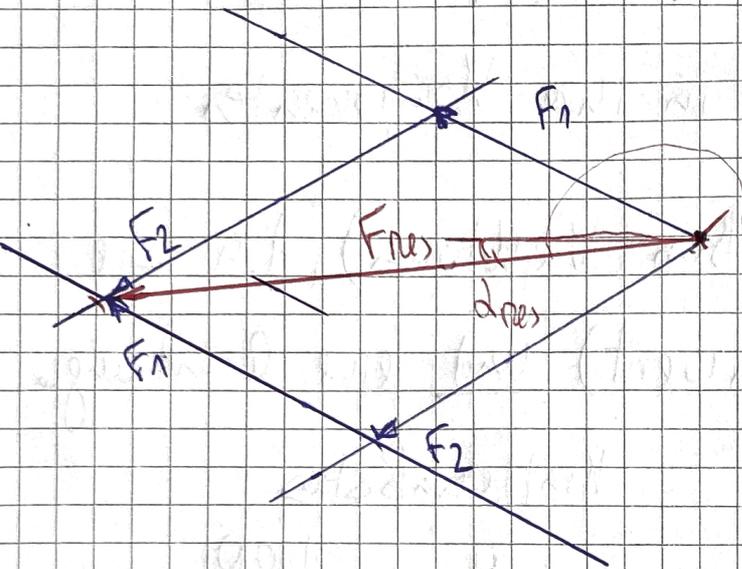
4. Ein großes Schiff wird von zwei kleineren Schleppschiffen in den Hafen gezogen. Konstruiere die Richtung, in welche sich das große Schiff bewegen wird, wenn S1 mit einer Kraft von 12 kN und S2 mit einer Kraft von 15 kN zieht. Welcher Kraftbetrag wirkt effektiv auf das große Schiff?



5. Eine Seilrolle ist mit einem kurzen Tau an der Decke befestigt. Es wird eine Masse $m = 20 \text{ kg}$ hochgezogen.
- Mit welcher Kraft (Betrag und Winkel) hält das kurze Tau?
 - Wie groß wird die Kraft im Tau, wenn F_s waagrecht nach rechts wirkt?



$$4. \quad M_F = \frac{30N}{1cm}$$

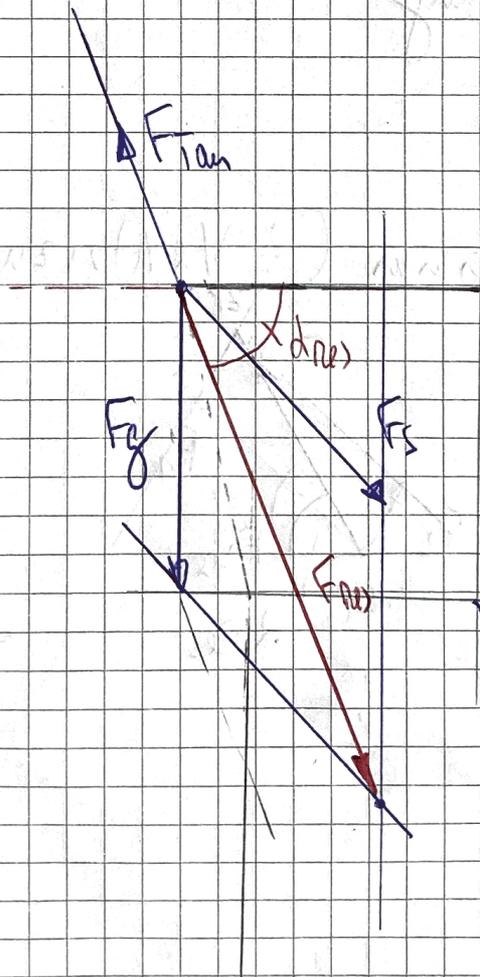


$$|F_{res}| = 240N$$

$$\alpha_{res} = 10^\circ$$

$$5. \quad M_F = \frac{50N}{1cm}$$

$$; \quad F_g = F_S = m \cdot g = 200N$$



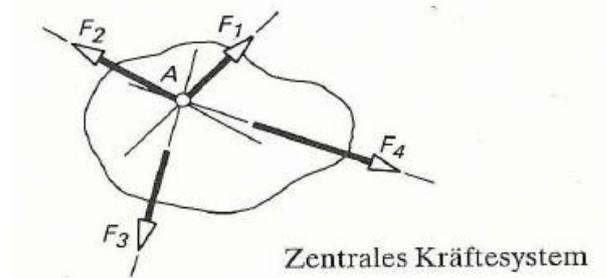
$$|F_{res}| = 260N$$

$$\alpha_{res} = 68^\circ$$

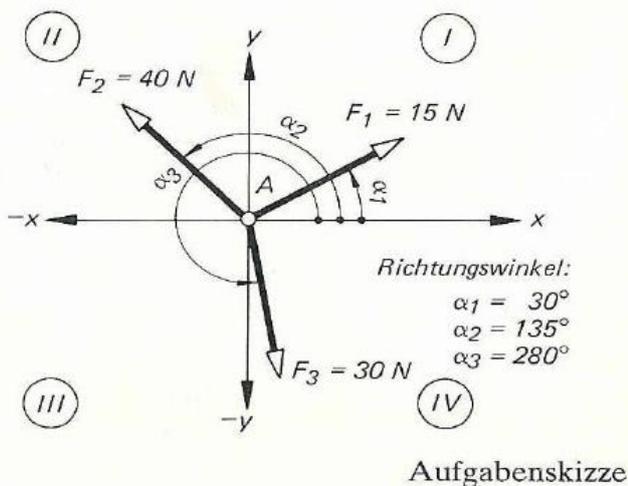
Bestimmung resultierender Kräfte

Zentrales Kräftesystem

Ein zentrales Kräftesystem liegt vor, wenn sich die Wirklinien der Kräfte in einem gemeinsamen Punkt schneiden. Ein zentrales Kräftesystem kann ein Bauteil nur verschieben, aber nicht drehen.



Aufgabe 1 :



Ein gegebenes zentrales Kräftesystem soll zeichnerisch reduziert sowie rechnerisch gelöst werden. Von der Resultierenden F_{res} sind der Betrag und der Richtungswinkel zu bestimmen.

Vorgehensweise zur grafischen Lösung

In den Lageplan werden die Wirklinien der Kräfte richtungstreu eingetragen. Durch Parallelverschiebung der Wirklinien und maßstabsgerechte Aneinanderreihung der Kräfte in beliebiger Reihenfolge erhalten wir den offenen Kräftezug F_{res} . Die Resultierende F_{res} ist die Verbindungslinie zwischen dem Anfangspunkt A und Endpunkt E. Ihr Richtungssinn weist von A nach E.

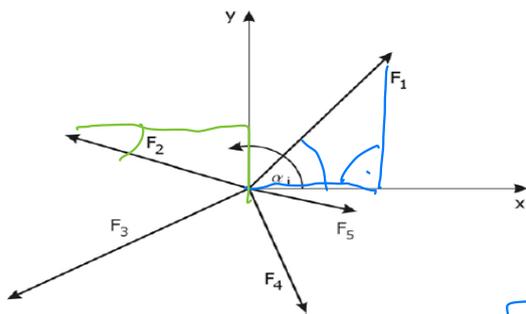
- Lageplan mit den Wirklinien aller Kräfte winkelgetreu in ein rechtwinkliges Achsenkreuz einzeichnen
- Im Kräfteplan die gegebenen Kräfte in beliebiger Reihenfolge maßstäblich aneinanderreihen
- Anfangs- und Endpunkt des Kräftezuges verbinden, Richtungssinn eintragen
- Resultierende F_{res} in den Zentralpunkt des Lageplanes übertragen
- Betrag und Richtungswinkel der Resultierenden abmessen

Vorgehensweise zur rechnerischen Ermittlung

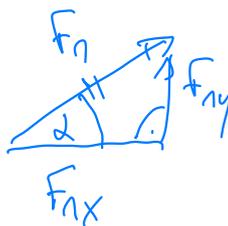
- Lageskizze mit allen gegebenen Kräften unmaßstäblich aufzeichnen
- Gegebene Kraftbeträge F_1, F_2, F_3, \dots und den jeweiligen Richtungswinkel in eine Tabelle eintragen. Richtungswinkel von der positiven x-Achse von 0° bis 360° im Linksdrehsinn festlegen
- Mit den Kraftbeträgen und Richtungswinkeln die Komponenten $F_{res,x}$ und $F_{res,y}$ der Resultierenden F_{res} berechnen
- Betrag der Resultierenden F_{res} mittels Pythagoras ermitteln
- Aus den Vorzeichen für die Komponenten $F_{res,x}$ und $F_{res,y}$ den Quadranten für die Resultierende F_{res} feststellen, und den Richtungswinkel der Resultierenden F_{res} berechnen

Aufgabe 2 :

An einem Leitungsmast üben fünf Drähte horizontale Kräfte aus. Gesucht sind der Betrag und der Winkel der resultierenden Kraft. Lösen Sie grafisch und rechnerisch.



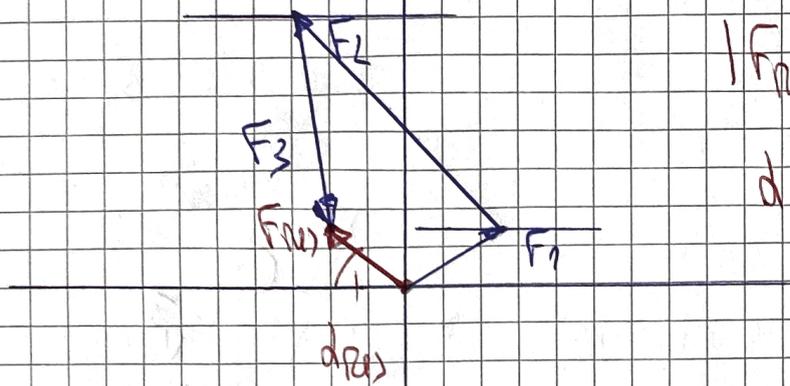
	F	α
1	400N	50°
2	350N	160°
3	500N	210°
4	300N	290°
5	200N	345°



$$\cos \alpha_n = \frac{\text{Ank}}{\text{Hyp}} = \frac{F_{nx}}{F_n}$$

$$\Rightarrow F_{nx} = F_n \cdot \cos \alpha_n$$

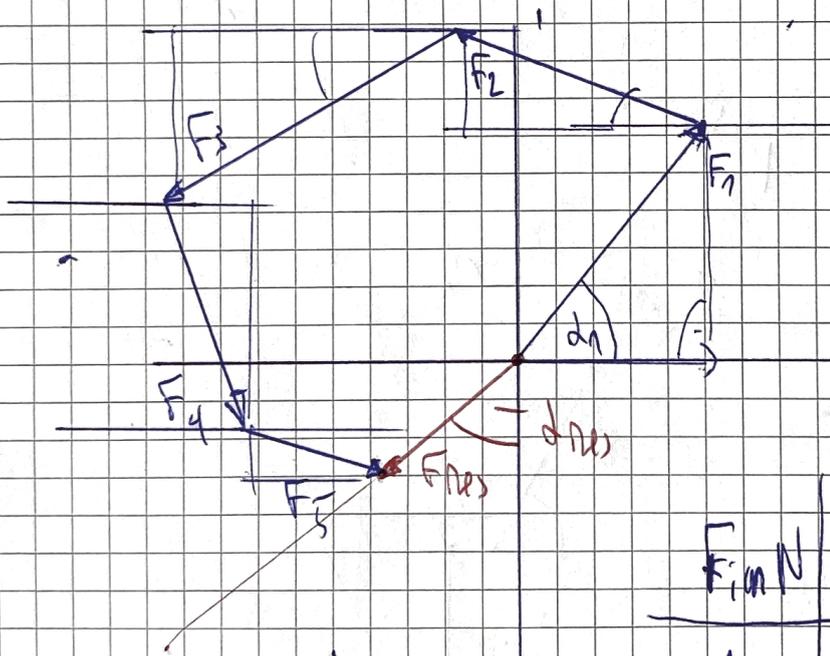
1) $\mu F = \frac{10N}{1cm}$



$|F_{res}| = 14N$

$\alpha_{res} = 35^\circ$

2) $\mu F = \frac{1000N}{1cm}$



$|F_{res}| = 240N$

$\alpha_{res} = 52^\circ$

F_i in N	X	Y
1		
2		
3		
4		
5		
Σ		

Drehwirkung einer Kraft

Greift eine Kraft im Schwerpunkt an, so kann sie dadurch Körper beschleunigen, verformen oder von ihrer Bahn ablenken.

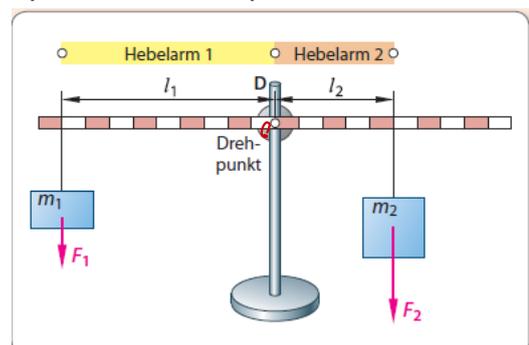
Welche Folge aber hat es, wenn Kräfte auf einen Körper nicht im Schwerpunkt, sondern mit einem gewissen Abstand dazu wirken?

Aus dem Alltag (Türen, Wippe auf dem Kinderspielplatz, Balkenwaage) weiß man, dass Kräfte auf drehbar gelagerte Körper Drehwirkungen ausüben können.



Versuch

Geht die Wirkungslinie einer Kraft nicht durch den Drehpunkt, so wird der Körper in Drehung versetzt. Der Abstand zwischen Kraftangriffspunkt und Drehpunkt wird als Hebelarm bezeichnet. Um die Drehwirkung einer Kraft näher untersuchen zu können, verwendet man die gezeigte Versuchsanordnung: An eine drehbar gelagerte Stange werden in unterschiedlichen Abständen Massestücke angehängt. Die Massestücke erfahren Gewichtskräfte, die den Hebelarm drehen möchten. Untersucht wird, bei welchen Bedingungen Gleichgewicht herrscht.



F_1 in N	l_1 in cm	$F_1 \cdot l_1$ in N · cm	F_2 in N	l_2 in cm	$F_2 \cdot l_2$ in N · cm
2	5	10	2	5	10
2	5	10	1	10	10
2	10	20	0,5	40	20
2	10	20	4	5	20
2	15	30	3	10	30
2	15	30	1	30	30
2	20	40	4	10	40
2	20	40	2	20	40

Schlussfolgerungen

Die Anordnung ist im Gleichgewicht, wenn das Produkt aus Kraft und Hebelarm ($F \times l$) auf beiden Seiten denselben Wert annimmt. Daher wird dieses Produkt als Maß für die Drehwirkung einer Kraft verwendet und Drehmoment genannt:

Formelzeichen:	M
Formel:	Drehmoment = Kraft · Hebelarm $M = F \cdot l$
Einheit:	$[M] = \text{N} \cdot \text{m}$

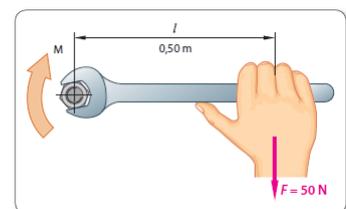
Einschränkung: Diese Formel gilt für Anordnungen, bei denen die Kraft senkrecht auf den Hebelarm wirkt.

Das Drehmoment gibt an, wie stark eine Kraft auf einen drehbar gelagerten Körper wirkt. Entscheidend für die Wirkung einer Kraft auf einen drehbaren Körper sind:

- der Betrag der Kraft,
- die Richtung der Kraft,
- der Abstand der Wirkungslinie der Kraft von der Drehachse.

Aufgaben

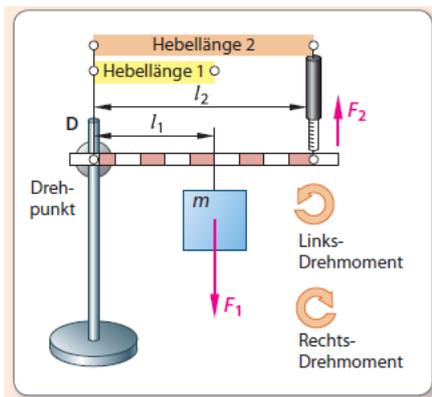
- 1) Mit einem Schraubenschlüssel wird eine Kraft von 50 N in einem Abstand von 0,5 m aufgebracht. Wie groß ist das auf die Mutter ausgeübte Drehmoment?
- 2) In welchem Abstand vom Drehpunkt müssen Sie den Schraubenschlüssel greifen, damit Sie mit derselben Kraft von 50 N ein Drehmoment von 10 Nm ausüben?
- 3) Welche Kraft müssen Sie bei einem Hebelarm von 0,4 m aufbringen, damit ein Drehmoment von 40 Nm ausgeübt wird?



Weiterführung

Gelten diese Erkenntnisse auch, wenn beide Kräfte auf derselben Seite des Drehpunktes angreifen (sogenannter einseitiger Hebel)?

Versuch



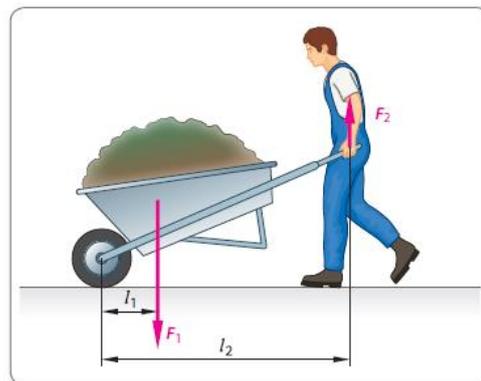
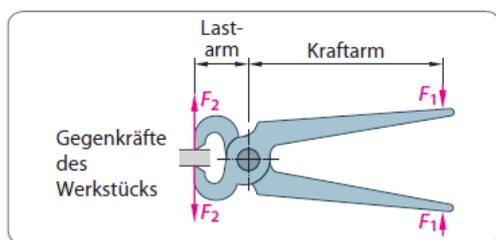
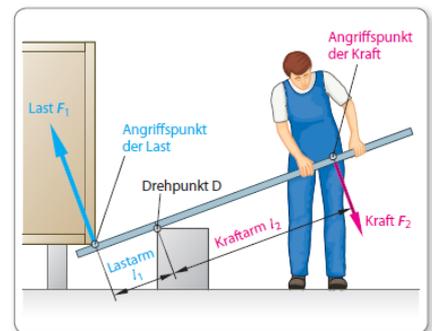
F_1 in N	l_1 in cm	$F_1 \cdot l_1$ in N · cm
2	20	40
2	20	40
2	20	40
F_2 in N	l_2 in cm	$F_2 \cdot l_2$ in N · cm
1	40	40
4	10	40
8	5	40

Schlussfolgerungen

Auch hier herrscht Gleichgewicht, wenn das Produkt aus Kraft und Hebelarm ($F \times l$) denselben Wert annimmt.

Anwendungen

Aus den Messwerten beider Anordnungen erkennt man einen technisch interessanten Zusammenhang: Verlängert man den Hebelarm l_2 , an dem die ausgleichende Kraft F_2 aufgebracht wird (Kraftarm), verringert man die zur Herstellung des Gleichgewichts notwendige Kraft. Derselbe Zusammenhang ist erkennbar, wenn man den belasteten Hebelarm l_1 (Lastarm) verkürzt. Bei technischen Anwendungen wird der Lastarm kurzgehalten und der Kraftarm entsprechend lang. Dies reduziert den Kraftaufwand.



Hebelgesetz

Das Hebelgesetz (von Archimedes ca. 250 v. Chr. beschrieben) folgt unmittelbar aus dieser Betrachtung des Drehmoments:

Ein Körper befindet sich im Gleichgewicht, wenn die Drehmomente, die ihn um den Drehpunkt im Uhrzeigersinn (linksdrehend) drehen möchten, gleich den Drehmomenten ist, die ihn im Gegenuhrzeigersinn (rechtsdrehend) drehen möchten. Die angreifenden Drehmomente müssen also ein Gesamtdrehmoment von Null ergeben. Dies deckt sich mit den Betrachtungen zum Kräftegleichgewicht.

$$F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$$

$$M_r = M_l$$

Aufgaben

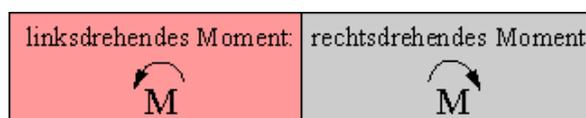
- 4) Um eine Schraube festzuziehen, soll gemäß Angabe ein Drehmoment von 5 Nm aufgebracht werden. Welche Kraft müssen Sie an einem 15 cm langen Schraubenschlüssel aufbringen, um dieser Vorgabe gerecht zu werden?
- 5) Zum Anziehen von Radmutter ist ein Drehmoment von 110 Nm vorgegeben. Der Drehmomentenschlüssel hat einen Hebelarm von 60 cm. Welche Kraft müssen Sie aufbringen?
- 6) Zwei Kinder setzen sich auf eine 4 m lange Wippe. Das Mädchen ($m_1 = 25$ kg) setzt sich 50 Zentimeter vom rechten Ende entfernt auf das Spielgerät, der Junge ($m_2 = 40$ kg) setzt sich 1 m links vom Drehpunkt.
 - Nach welcher Seite kippt die Wippe, wenn sich beide Kinder wie beschrieben daraufsetzen? Begründen Sie das.
 - An welcher Stelle muss das Mädchen sitzen, damit die Wippe im Gleichgewicht wäre?

Weiterführung des Hebelgesetzes - Momentenbilanz

Aus den dargestellten Versuchen ergibt sich die Gleichgewichtsbedingung:

Der Hebel ist im Gleichgewicht, wenn die Summe der linksdrehenden Momente gleich der Summe der rechtsdrehenden Momente ist.

$$F_{1l} \cdot l_{1l} + F_{2l} \cdot l_{2l} + F_{3l} \cdot l_{3l} + \dots = F_{1r} \cdot l_{1r} + F_{2r} \cdot l_{2r} + F_{3r} \cdot l_{3r} + \dots$$



Ein Körper ist unter den Bedingungen der Statik also dann in Ruhe, wenn die resultierenden Kräfte in allen Richtungen sowie das resultierende Moment (in Bezug auf einen frei wählbaren Drehpunkt) Null sind:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \rightarrow \text{Summe aller Kräfte in x-Richtung Null}$$

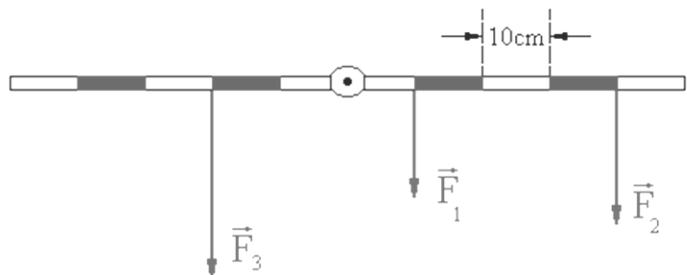
$$\Sigma F_y = 0 \quad \rightarrow \text{Summe aller Kräfte in y-Richtung Null}$$

$$\Sigma M = 0 \quad \rightarrow \text{Summe aller Momente um einen Drehpunkt Null}$$

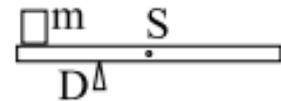
Aufgaben

- 7) Welche Kraft F_3 ist nötig, damit der dargestellte Hebel im Gleichgewicht ist?

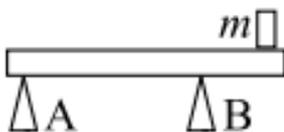
$$F_1 = 40\text{N}; F_2 = 50\text{N}$$



- 8) Ein 43 cm langer Träger der Masse 180 g wird 12 cm links vom Schwerpunkt S bei D unterstützt. Wie weit links von D muss man den Klotz mit $m = 270\text{g}$ platzieren, damit Gleichgewicht herrscht?



- 9) Ein Balken mit Länge 1,6 m und Masse 36 kg wird bei A 20 cm vom linken und bei B 60 cm vom rechten Ende gestützt. Wie weit rechts von B entfernt kann man eine Masse m von 14 kg auf den Balken stellen, ohne dass der Balken kippt?



$$1) M = F \cdot l = 50 \text{ N} \cdot 0,5 \text{ m} = \underline{25 \text{ Nm}}$$

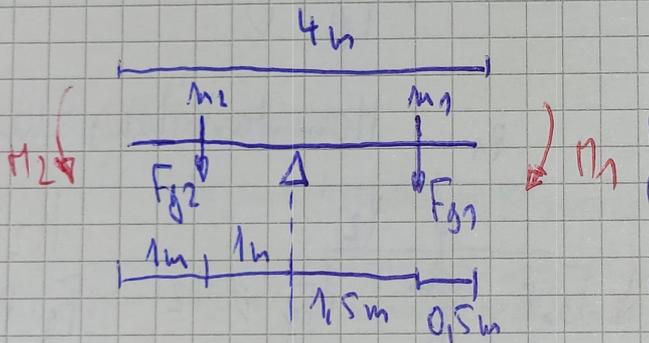
$$2) l = \frac{M}{F} = \frac{10 \text{ Nm}}{50 \text{ N}} = \underline{0,2 \text{ m}}$$

$$3) F = \frac{M}{l} = \frac{40 \text{ Nm}}{0,4 \text{ m}} = \underline{100 \text{ N}}$$

$$4) F = \frac{M}{l} = \frac{5 \text{ Nm}}{0,15 \text{ m}} = \underline{33,3 \text{ N}}$$

$$5) F = \frac{M}{l} = \frac{110 \text{ Nm}}{0,6 \text{ m}} = \underline{183,3 \text{ N}}$$

b)



$$\left. \begin{array}{l} M_2 = 375 \text{ Nm} \\ M_1 = 400 \text{ Nm} \end{array} \right\} M_2 > M_1 \rightarrow$$

$$M_2 = M_1 ; \Sigma M = 0$$

$$F_{g2} \cdot l_2 = F_{g1} \cdot l_1$$

$$m_2 g \cdot l_2 = m_1 g \cdot l_1$$

$$l_1 = \frac{m_2}{m_1} \cdot l_2 = \underline{1,6 \text{ m}}$$

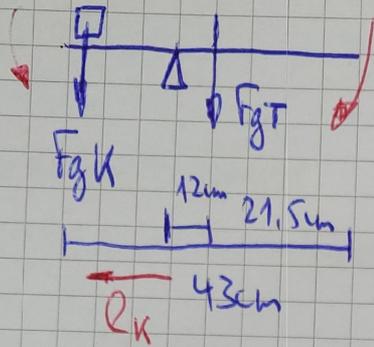
7) $M_e = M_r ; \Sigma M = 0$

$$\Sigma M = 0 = F_3 \cdot l_3 - F_1 \cdot l_1 - F_2 \cdot l_2$$

$$F_1 \cdot l_1 + F_2 \cdot l_2 = F_3 \cdot l_3 \quad | : l_3$$

$$\Rightarrow F_3 = \frac{F_1 \cdot l_1 + F_2 \cdot l_2}{l_3} = \underline{120 \text{ N}}$$

8)



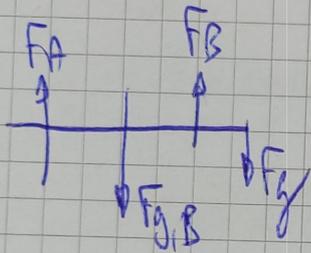
$$\sum M_D = 0$$

$$F_{gK} \cdot l_K - F_{gT} \cdot l_T = 0$$

$$m_K \cdot g \cdot l_K - m_T \cdot g \cdot 12\text{ cm} = 0$$

$$\Rightarrow R_K = \frac{m_T}{m_K} \cdot 12\text{ cm} = \underline{8\text{ cm}}$$

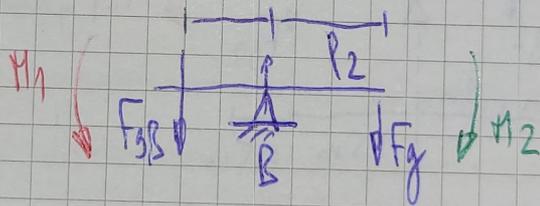
9)



Grenzbedingung für Kippen:

$$F_A = 0$$

P_1 = Momentenbilanz um B



$$M_2 \geq M_1$$

$$F_g \cdot P_2 = F_{gB} \cdot 0,2\text{ m}$$

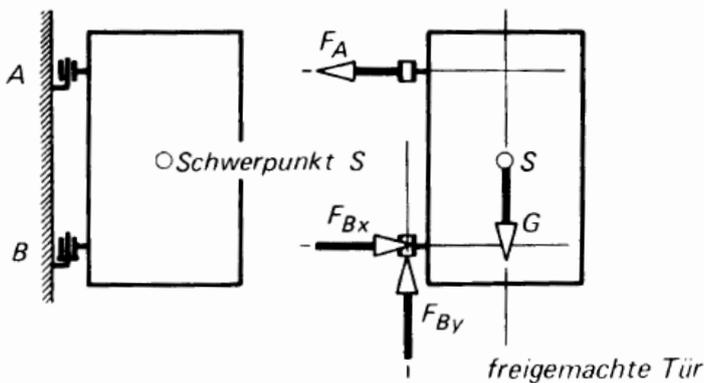
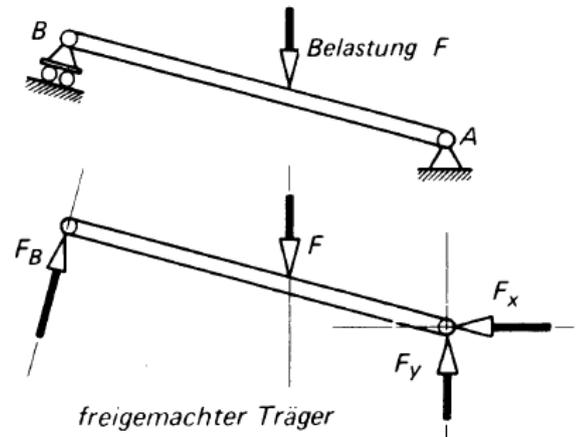
$$m \cdot g \cdot P_2 = m_B \cdot g \cdot 0,2\text{ m}$$

$$\Rightarrow P_2 = \frac{m_B \cdot 0,2\text{ m}}{m} = \frac{36\text{ kg} \cdot 0,2}{14\text{ kg}}$$

$$= \underline{0,51\text{ m}}$$

Zusammenfassung der Arbeitsschritte

- Lageskizze des freizumachenden Bauteils zeichnen
- Kraft- und Momentenangriffspunkte mit den gedanklich gelösten Bauteilen festlegen
- Wirklinien aller Kräfte und – bei dreiwertigen Lagern - Momente einzeichnen
- Richtungssinn für alle Kraftpfeile und - bei dreiwertigen Lagern – Drehsinn für Momente festlegen



Gleichgewichtsbedingungen

Ursache einer Verschiebung ist eine Einzelkraft.

Ursache einer Drehung ist ein Kräftepaar / Moment. Dem Umkehrschluss folgern wir, dass, wenn keine Kraft wirkt, und kein Kraftmoment vorhanden ist, sich das Bauteil nicht verschiebt und nicht verdreht.

Ein Körper ist unter den Bedingungen der Statik dann in Ruhe, wenn die resultierenden Kräften in allen Richtungen sowie das resultierende Moment (in Bezug auf einen frei wählbaren Drehpunkt) Null sind:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \rightarrow \text{Summe aller Kräfte in x-Richtung Null}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \rightarrow \text{Summe aller Kräfte in y-Richtung Null}$$

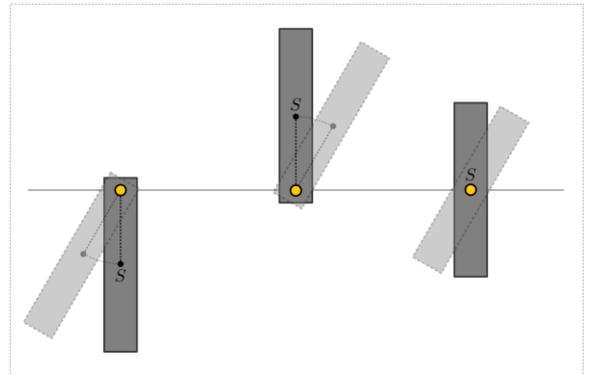
$$\Sigma M = 0 \quad \rightarrow \text{Summe aller Momente um einen Drehpunkt Null}$$

Somit gibt es drei Gleichungen, aus denen mathematisch (durch Auflösen, Umstellen, Einsetzen, etc.) drei Unbekannte (meistens Lagerkräfte) ermittelt werden können.

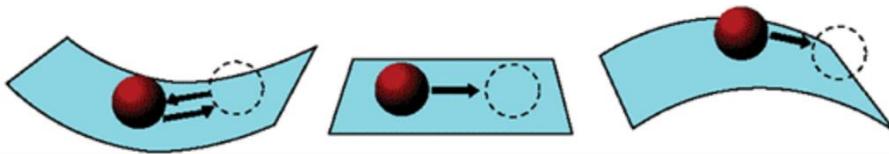
Stabiles, labiles und indifferentes Gleichgewicht

Allgemein kann zwischen drei unterschiedlichen Gleichgewichts-Arten unterschieden werden:

- Ein Körper im stabilen Gleichgewicht kehrt bei einer kleinen Auslenkung von selbst wieder in seine ursprüngliche Lage zurückführt.
- Ein Körper im labilen Gleichgewicht kippt bei einer minimalen Auslenkung um, entfernt sich also dauerhaft von der Ausgangslage.
- Ein Körper in indifferentem Gleichgewicht ist in keiner Lage stabiler als in einer anderen.



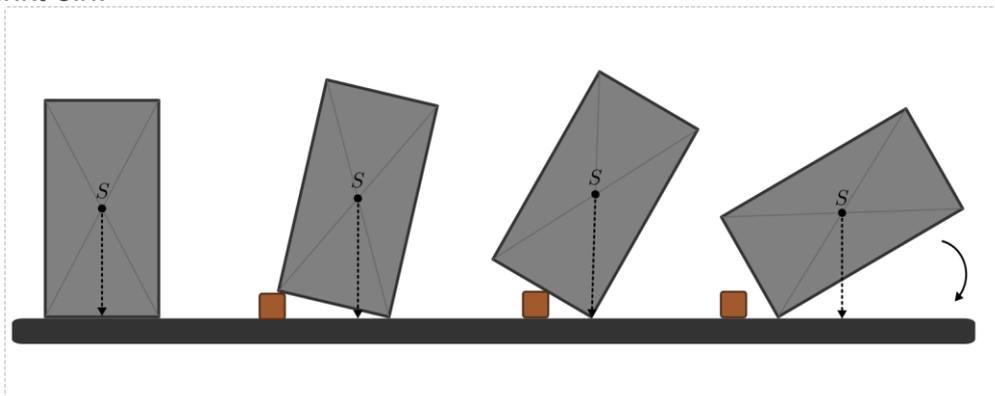
Kann sich ein Körper frei um eine Drehachse beziehungsweise einen Aufhängepunkt drehen, so nimmt sein Schwerpunkt die tiefst mögliche Stelle ein. In dieser Lage befindet sich der Schwerpunkt stets senkrecht unterhalb der Achse beziehungsweise des Aufhängepunkts. Sind Schwerpunkt, Aufhänge- und Drehpunkt identisch, so befindet sich der Körper in jeder Lage im indifferenten Gleichgewicht.



Schwerpunkt und Auflagefläche

Ein freistehender Körper, an dem keine äußeren Drehmomente wirken, kippt nicht um, solange sich sein Schwerpunkt oberhalb der Auflagefläche („Standfläche“) befindet. Der Grund dafür ist, dass bei einer kleinen Auslenkung der Schwerpunkt des Körpers zunächst angehoben wird.

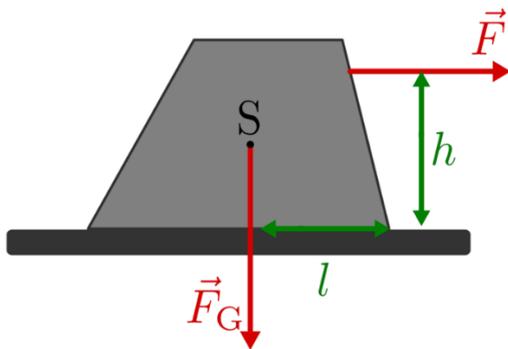
Bei einer weiteren Auslenkung überschreitet die vom Schwerpunkt aus senkrecht nach unten gezeichnete Lot-Linie die Grenze der Auflagefläche. Sobald dies der Fall ist, kippt der Körper um und nimmt damit eine stabile Gleichgewichtslage mit tieferliegendem Schwerpunkt ein.



Standsicherheit

Die Standsicherheit ist die Anforderung an Maschinenteile, Maschinen oder sonstige Baukonstruktionen, im Betrieb nicht umzufallen, zu kippen oder einzustürzen.

Verläuft die Resultierende aus Kippkraft F_k und Gewichtskraft F_G innerhalb der Standfläche, kann der Körper nicht kippen.



Technisch eleganter lässt sich die Standsicherheit über eine Untersuchung der wirksamen Drehmomente durchführen: Die äußere Kraft erzeugt als Kippkraft ein Kippmoment, das zum Kippen führen kann. Ihr entgegen wirkt das von der Gewichtskraft erzeugte Standmoment. Ist das Standmoment größer als das Kippmoment, steht der Körper.

Vorgehensweise:

- Überlegung, in welche Richtung / um welchen Punkt oder Kante das Kippen bei Überlastung stattfindet.
- Bestimmen der Standmomente und Kippmomente
- Vergleich der Werte

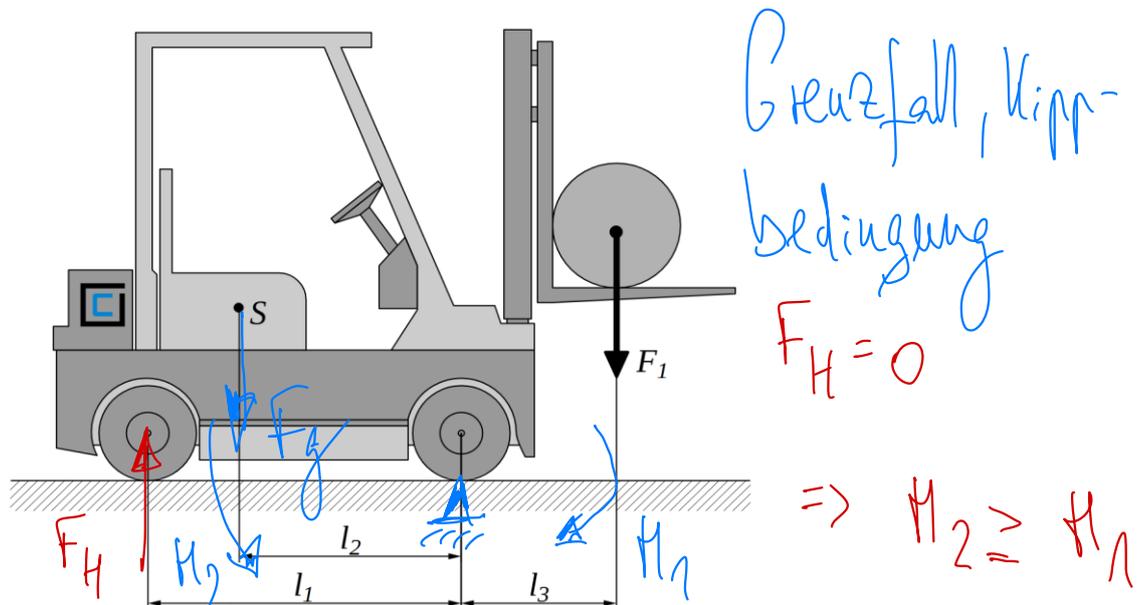
Beispiel: Kippende Bierbank



Gabelstapler

An einem Gabelstapler greift im Schwerpunkt S die Eigengewichtskraft F_G an. Die Beladung wird durch die Last F_1 dargestellt.

- Fertigen Sie eine Kräfteskitze der Anordnung.
- Markieren Sie den Punkt / Kante, um die die Anordnung bei Überlastung kippen würde.
- Zeichnen Sie die wirksamen Momente ein.
- Geben Sie deren Berechnung an.
- Mit welcher Maßnahme könnte man in der Praxis die Standsicherheit der Anordnung erhöhen?



Erweiterung: Zahlenbeispiel zur Berechnung

In der skizzierten Stellung wirkt am Hubmast die Last F_1 , die Eigengewichtskraft $F_G = 7,5 \text{ kN}$ greift im Schwerpunkt S an.

Die Abstände betragen $l_1 = 1,6 \text{ m}$, $l_2 = 1,02 \text{ m}$ und $l_3 = 0,6 \text{ m}$.

- Wie groß darf die Last F_1 maximal sein, ohne dass der Gabelstapler ankippt?
- Der Hersteller gibt die maximale Last mit 8 kN an, da die Gabeln zum Be- und Entladen noch ausgefahren werden können. Berechnen Sie den maximalen Abstand l_3^* , bis zu dem die Ladung verfahren werden darf.



$$a) M_2 \geq M_1 \quad M = F \cdot l \quad ; \quad F \perp l$$

$$F_g \cdot l_2 \geq \overline{F}_1 \cdot l_3$$

$$7500 \text{ N} \cdot 1,02 \text{ m} = \overline{F}_1 \cdot 0,6 \text{ m} \quad | : 0,6 \text{ m}$$

$$\frac{7500 \text{ N} \cdot 1,02 \text{ m}}{0,6 \text{ m}} = \underline{12,75 \text{ kN}} = \overline{F}_1$$

$$b) M_2 \geq M_1$$

$$F_g \cdot l_2 \geq \overline{F}_1^* \cdot l_3^*$$

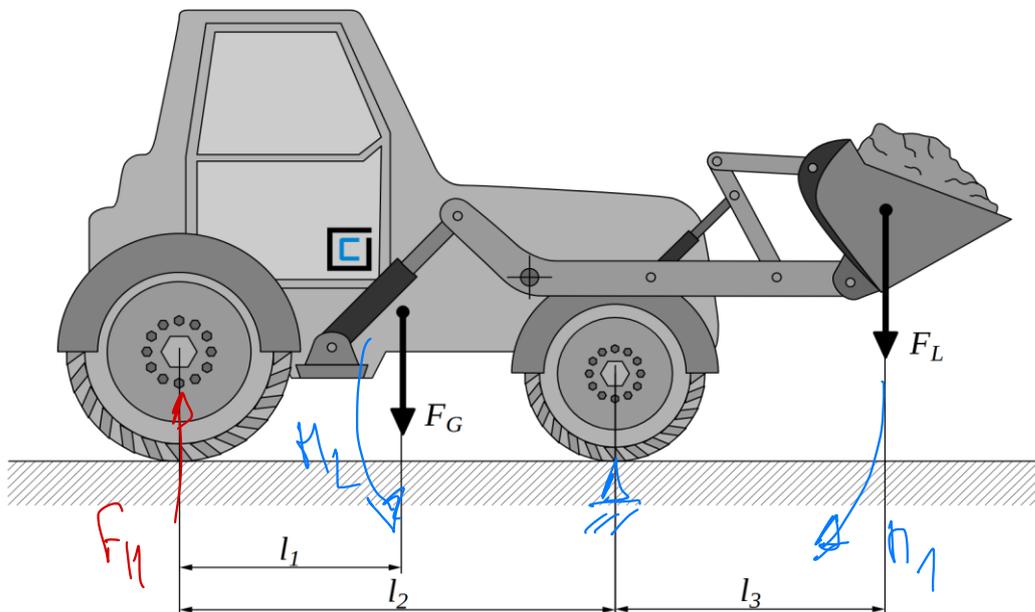
$$7500 \text{ N} \cdot 1,02 \text{ m} = 8000 \text{ N} \cdot l_3^*$$

$$l_3^* = \frac{7500 \text{ N} \cdot 1,02 \text{ m}}{8000 \text{ N}} = \underline{0,96 \text{ m}}$$

Frontlader

Ein Schlepper mit angebautem Frontlader hat die Gewichtskraft F_G . Er soll zum Aufladen von Baumstümpfen eingesetzt werden, deren Last durch F_L dargestellt ist.

- Markieren Sie den Punkt / Kante, um die die Anordnung bei Überlastung kippen würde.
- Zeichnen Sie die wirksamen Momente ein.
- Geben Sie deren Berechnung an.
- Mit welcher Maßnahme könnte man in der Praxis die Standsicherheit der Anordnung erhöhen?



Erweiterung: Zahlenbeispiel zur Berechnung

Ein Schlepper mit angebautem Frontlader hat die Gewichtskraft $F_G = 12 \text{ kN}$. Er soll zum Aufladen von Baumstümpfen eingesetzt werden, deren Last durch F_L dargestellt ist.

Die Abstände betragen $l_1 = 0,94 \text{ m}$, $l_2 = 1,95 \text{ m}$ und $l_3 = 1,8 \text{ m}$.

- Wie groß darf die Last F_L maximal sein, ohne dass der Frontlader ankippt?
- Der Hersteller gibt die maximale Last mit 5 kN an, da die Schaufeln zum Be- und Entladen noch ausgefahren werden können. Berechnen Sie den maximalen Abstand l_3^* , bis zu dem die Ladung verfahren werden darf.



$$a) M_g \geq M_L$$

$$F_g \cdot (l_2 - l_1) \geq F_L \cdot l_3$$

$$12 \text{ kN} \cdot 1,01 \text{ m} = F_L \cdot 1,8 \text{ m}$$

$$F_L = \frac{12 \text{ kN} \cdot 1,01 \text{ m}}{1,8 \text{ m}} = \underline{\underline{6,733 \text{ kN}}}$$

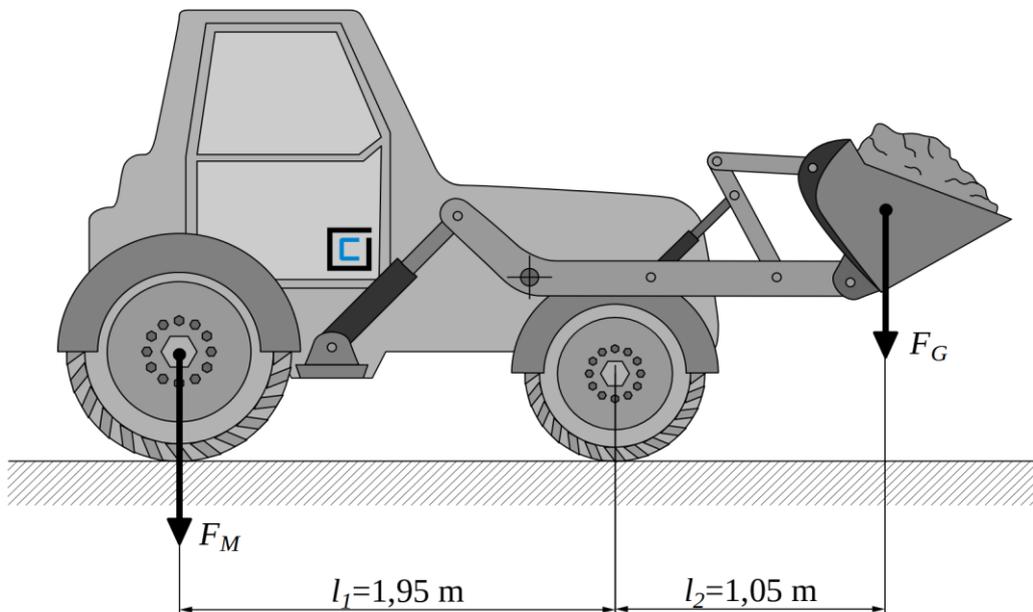
$$b) F_g \cdot (l_2 - l_1) = F_L \cdot l_3^*$$

$$l_3^* = \frac{12 \text{ kN} \cdot 1,01 \text{ m}}{5 \text{ kN}} = \underline{\underline{2,42 \text{ m}}}$$

Radlader

Die am Radlader wirkenden Kräfte sind in zwei Kräften zusammengefasst: Das Maschinengewicht F_M greift an den Hinterrädern an. Das Auslegergewicht zusammen mit dem Schaufelinhalt F_G wirkt etwa in der Schaufelmitte.

- Markieren Sie den Punkt / Kante, um die die Anordnung bei Überlastung kippen würde.
- Zeichnen Sie die wirksamen Momente ein.
- Geben Sie deren Berechnung an.
- Mit welcher Maßnahme könnte man in der Praxis die Standsicherheit der Anordnung erhöhen?



Erweiterung: Zahlenbeispiel zur Berechnung

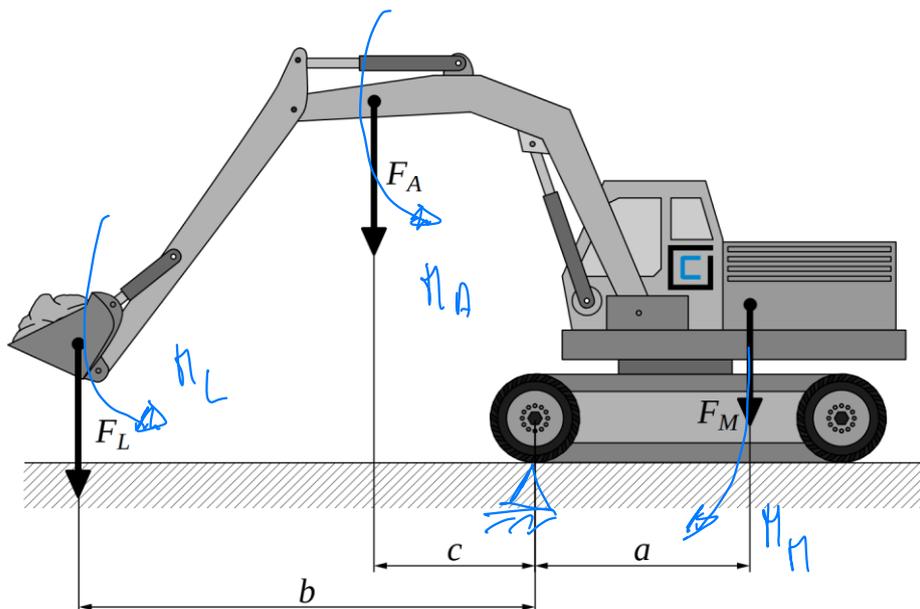
Die am Radlader wirkenden Kräfte sind in zwei Kräften zusammengefasst: Das Maschinengewicht F_M greift an den Hinterrädern an: $F_M = 28,5 \text{ kN}$. Das Auslegergewicht zusammen mit dem Schaufelinhalt F_G wirkt etwa in der Schaufelmitte.

- Wie groß darf die Last F_G maximal sein, ohne dass der Frontlader ankippt?
- Der Hersteller gibt die maximale Last mit 40 kN an, da die Schaufeln zum Be- und Entladen noch ausgefahren werden können. Berechnen Sie den maximalen Abstand l_2^* , bis zu dem die Ladung verfahren werden darf.

Löffelbagger

Im Unterschied zu einem Radlader ist ein Löffelbagger durch seinen weit heb- und senkbaren Ausleger in der Lage, auch deutlich unterhalb seiner eigenen Standebene zu arbeiten und wird dadurch bevorzugt zum Ausheben von Baugruben, u.ä. eingesetzt. Das Maschinengewicht wird durch F_M zusammengefasst, das Eigengewicht des Auslegersystems durch F_A .

- Markieren Sie den Punkt / Kante, um die die Anordnung bei Überlastung kippen würde. Zeichnen Sie die wirksamen Momente ein.
- Geben Sie deren Berechnung an.
- Mit welcher Maßnahme könnte man in der Praxis die Standsicherheit der Anordnung erhöhen?



Erweiterung: Zahlenbeispiel zur Berechnung

Das Maschinengewicht F_M beträgt 19,2 kN, das Eigengewicht des Auslegersystems ist $F_A = 5,7$ kN.

Die Abstände betragen $a = 0,62$ m, $b = 1,05$ m und $c = 0,25$ m.

- Wie groß darf die Last F_L maximal sein, ohne dass der Löffelbagger ankippt?
- Der Hersteller gibt die maximale Last mit 8 kN an, da die Schaufeln zum Be- und Entladen noch ausgefahren werden können. Berechnen Sie den maximalen Abstand b^* , bis zu dem die Ausladung verfahren werden darf.



$$M_L + M_A \geq M_n$$

$$F_L \cdot b + F_A \cdot c = F_n \cdot a$$

$$F_L \cdot b = F_n \cdot a - F_A \cdot c$$

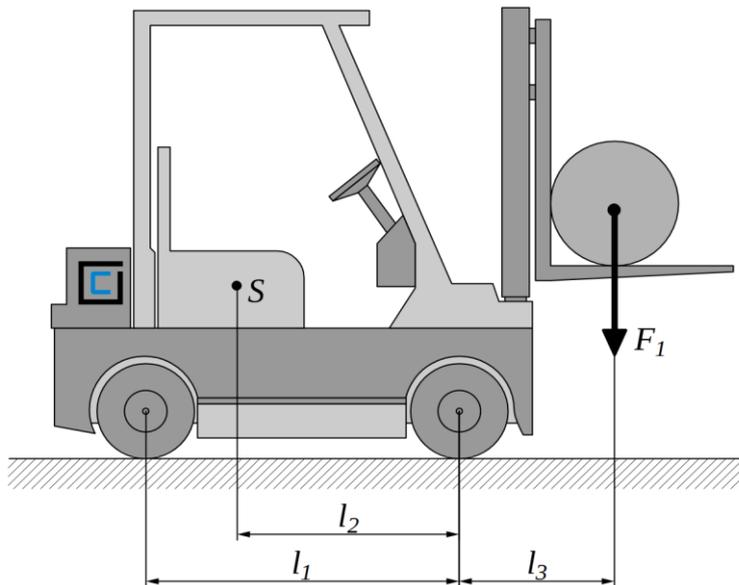
$$F_L = \frac{F_n \cdot a - F_A \cdot c}{b} = \frac{19,29 \text{ kN} \cdot 0,62 \text{ m} - 5,79 \text{ kN} \cdot 0,25 \text{ m}}{1,05 \text{ m}}$$

$$\underline{F_L = 9,98 \text{ kN}}$$

Gabelstapler

An einem Gabelstapler greift im Schwerpunkt S die Eigengewichtskraft F_G an. Die Beladung wird durch die Last F_1 dargestellt.

- Fertigen Sie eine Kräfteskizze der Anordnung.
- Markieren Sie den Punkt / Kante, um die die Anordnung bei Überlastung kippen würde.
- Zeichnen Sie die wirksamen Momente ein.
- Geben Sie deren Berechnung an.
- Mit welcher Maßnahme könnte man in der Praxis die Standsicherheit der Anordnung erhöhen?



Erweiterung: Zahlenbeispiel zur Berechnung

In der skizzierten Stellung wirkt am Hubmast die Last F_1 , die Eigengewichtskraft $F_G = 7,5 \text{ kN}$ greift im Schwerpunkt S an.

Die Abstände betragen $l_1 = 1,6 \text{ m}$, $l_2 = 1,02 \text{ m}$ und $l_3 = 0,6 \text{ m}$.

- a) Wie groß darf die Last F_1 maximal sein, ohne dass der Gabelstapler ankippt?
- b) Der Hersteller gibt die maximale Last mit 8 kN an, da die Gabeln zum Be- und Entladen noch ausgefahren werden können. Berechnen Sie den maximalen Abstand l_3^* , bis zu dem die Ladung verfahren werden darf.



$$\overline{F_{res,y}} = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\Rightarrow F_H - F_g + F_v - F_n = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_v = 0$$

$$\Rightarrow -M_H + M_g - M_n = 0$$

$$-F_H \cdot l_1 + F_g \cdot l_2 - F_n \cdot l_3 = 0 \quad (2)$$

$$F_g \cdot l_2 - F_n \cdot l_3 = F_H \cdot l_1 \quad | : l_1$$

$$\frac{F_g \cdot l_2 - F_n \cdot l_3}{l_1} = F_H$$

$$\frac{7,5 \text{ kN} \cdot 1,0 \text{ m} - 8 \text{ kN} \cdot 0,6 \text{ m}}{1,0 \text{ m}} = \underline{1,78 \text{ kN}} = F_H$$

in (1)

$$F_H - F_g + F_v - F_n = 0$$

$$F_v = -F_H + F_g + F_n$$

$$= -1,78 \text{ kN} + 7,5 \text{ kN} + 8 \text{ kN} = \underline{13,72 \text{ kN}}$$

Reaktions- und Lagerkräfte

- Loslager (einwertig): Diese Lager-/ Befestigungsstelle nimmt Kraft in einer Richtung auf.

Beispiele: Seile, Kette, Feder, Kolben, Stäbe, Rollen

Symbol:



- Festlager (zweiwertig): Nehmen Kräfte in zwei Richtungen auf

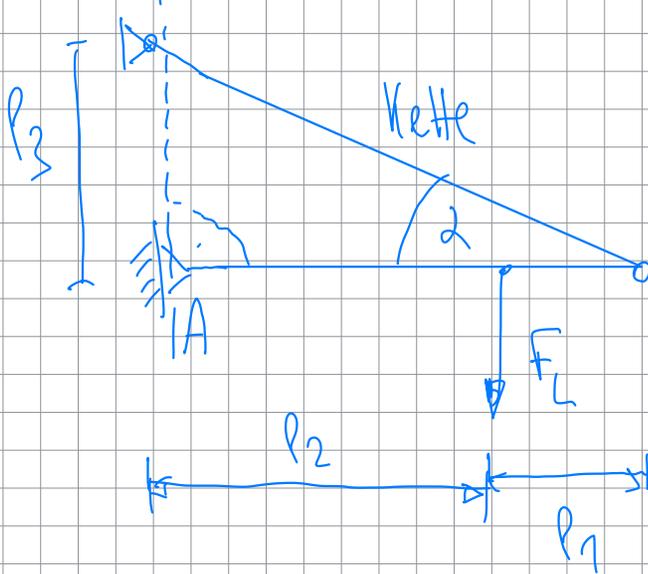
Beispiele: Gebremstes / blockiertes Rad, Wälzlager mit Anschlag

Symbol:





Übungsaufgabe



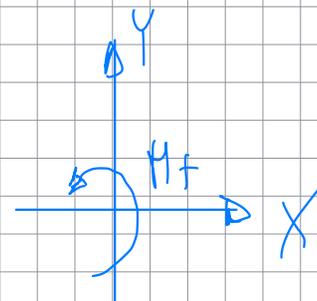
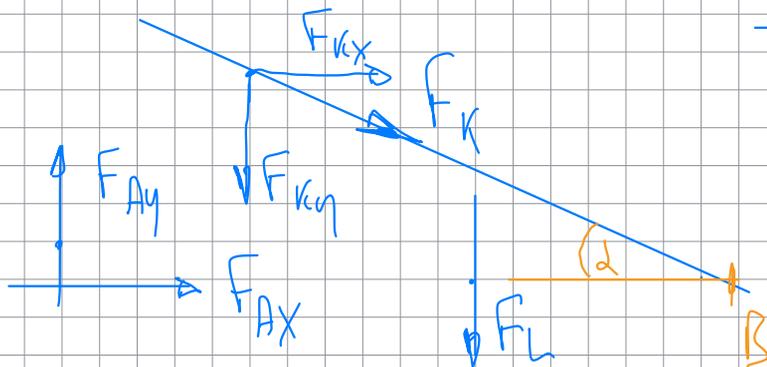
$$l_1 = 1 \text{ m}$$

$$l_2 = 3 \text{ m}$$

$$l_3 = 2 \text{ m}$$

$$F_L = 8 \text{ kN}$$

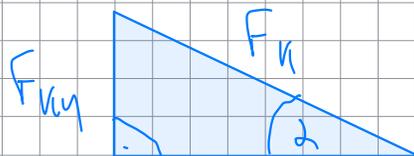
Freischnitt



$$\cdot \sum F_x = 0$$

$$\cdot \sum F_y = 0$$

$$\cdot \sum M_i = 0$$



$$F_{kx} = F_k \cdot \cos \alpha$$

$$F_{ky} = F_k \cdot \sin \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{BK}{AK} = \frac{l_3}{l_1 + l_2} = \frac{2 \text{ m}}{4 \text{ m}} = 0,5 \Rightarrow \tan^{-1}(0,5) = \alpha = \underline{26,6^\circ}$$



$$\sum F_x = F_{Ax} + F_{Kx} = 0 \quad (1)$$

$$F_{Ax} + F_K \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\sum F_y = F_{Ay} - F_{Ky} - F_L = 0 \quad (2)$$

$$F_{Ay} - F_K \cdot \sin \alpha - F_L = 0$$

$$\sum M_B = -M_{F_{Ay}} + M_{F_L} = 0 \quad (3)$$

$$-F_{Ay} \cdot (l_1 + l_2) + F_L \cdot l_1 = 0$$

$$F_L \cdot l_1 = F_{Ay} (l_1 + l_2) \quad | : (l_1 + l_2)$$

$$\Rightarrow F_{Ay} = \frac{F_L \cdot l_1}{l_1 + l_2} = \underline{2 \text{ kN}} \quad \text{in (2)}$$

$$\Rightarrow F_{Ay} - F_L = F_K \cdot \sin \alpha \quad | : \sin \alpha$$

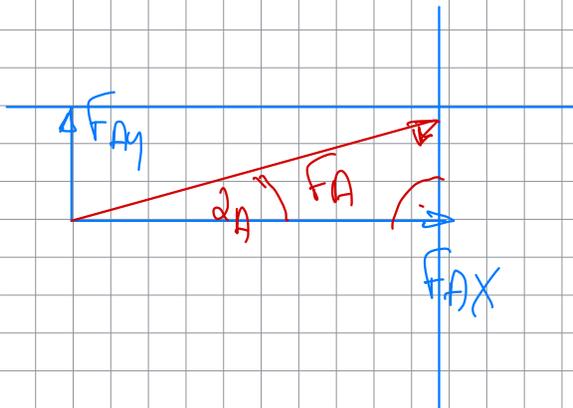
$$\Rightarrow F_K = \frac{F_{Ay} - F_L}{\sin \alpha} = \frac{2 \text{ kN} - 8 \text{ kN}}{\sin 26,6^\circ}$$

$$= \underline{-13,49 \text{ kN}} \quad \text{in (1)}$$



$$F_{AX} + F_U \cdot \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow F_{AX} = - F_U \cdot \cos \alpha = \underline{12 \text{ kN}}$$



$$F_A^2 = F_{AX}^2 + F_{AY}^2$$

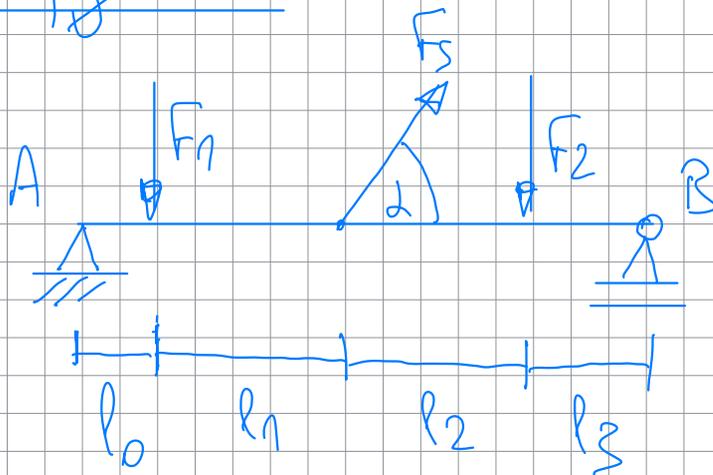
$$\Rightarrow F_A = \underline{12,2 \text{ kN}}$$

$$\tan \alpha = \frac{F_{AY}}{F_{AX}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \tan^{-1} \left(\frac{F_{AY}}{F_{AX}} \right) = \underline{95^\circ}$$



Aufgabe 1



- Freischnitt
 - Zerlegen der „schrägen“ Kraft
 - Bilanzieren
- ⇒ F_A

$$l_0 = 0,4 \text{ m}$$

$$l_1 = 2 \text{ m}$$

$$l_2 = 1,5 \text{ m}$$

$$l_3 = 0,7 \text{ m}$$

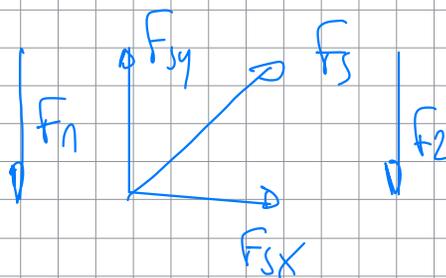
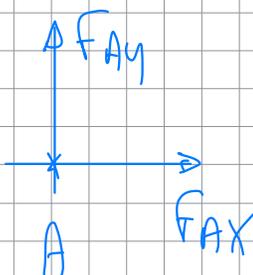
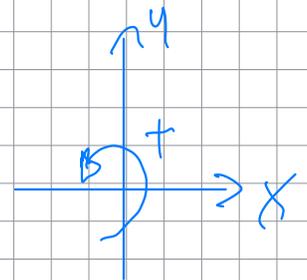
$$F_1 = 20 \text{ N}$$

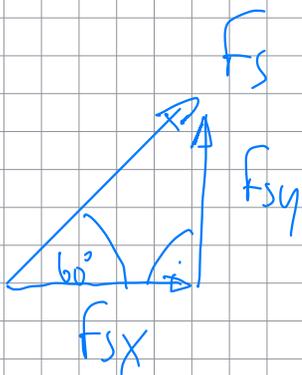
$$F_2 = 20 \text{ N}$$

$$F_3 = 25 \text{ N}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

Freischnitt





$$\cos 60^\circ = \frac{AK}{Hyp} = \frac{F_{sx}}{F_s}$$

$$F_{sx} = F_s \cdot \cos 60^\circ = 12,5 \text{ kN}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{BK}{Hyp} = \frac{F_{sy}}{F_s}$$

$$\Rightarrow F_{sy} = F_s \cdot \sin 60^\circ = 21,7 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = F_{Ax} + F_{sx} = 0$$

$$\Rightarrow F_{Ax} = -F_{sx} = -12,5 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = F_{Ay} - F_1 + F_{sy} - F_2 + F_B = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A = -M_{F_1} + M_{F_{sy}} - M_{F_2} + M_{F_B} = 0$$

$$= -F_1 \cdot l_0 + F_{sy} \cdot (l_0 + l_1) - F_2 \cdot (l_0 + l_1 + l_2) + F_B \cdot l_3$$

$$\Rightarrow F_B = \frac{F_1 \cdot l_0 - F_{sy} (l_0 + l_1) + F_2 (l_0 + l_1 + l_2)}{l_0 + l_1 + l_2 + l_3}$$



$$F_B = \frac{3020 \text{ N} \cdot 0,4 \text{ m} - 21,79 \text{ N} \cdot 2,4 \text{ m} + 2020 \text{ N} \cdot 3,9 \text{ m}}{4,6 \text{ m}}$$

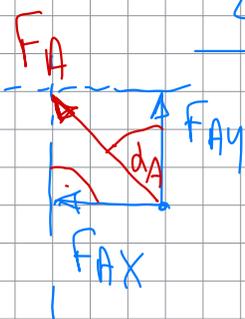
$$= \underline{8,24 \text{ kN}} \quad \text{in (2)}$$

$$F_{Ay} - F_1 + F_{Sy} - F_2 + F_B = 0$$

$$\Rightarrow F_{Ay} = F_1 - F_{Sy} + F_2 - F_B$$

$$= 3020 \text{ N} - 21,79 \text{ kN} + 2020 \text{ N} - 8,24 \text{ kN}$$

$$= \underline{20 \text{ kN}}$$



$$F_A^2 = F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2$$

$$\Rightarrow \underline{F_A = 23,6 \text{ kN}}$$

$$\tan \alpha_A = \frac{BY}{AY} = \frac{F_{Ax}}{F_{Ay}} = \frac{12,5 \text{ kN}}{20 \text{ kN}}$$

$$\alpha_A = \tan^{-1} \left(\frac{12,5}{20} \right) = \underline{32^\circ}$$

$$l_0 = 0,4 \text{ m}$$

$$l_1 = 2 \text{ m}$$

$$l_2 = 1,5 \text{ m}$$

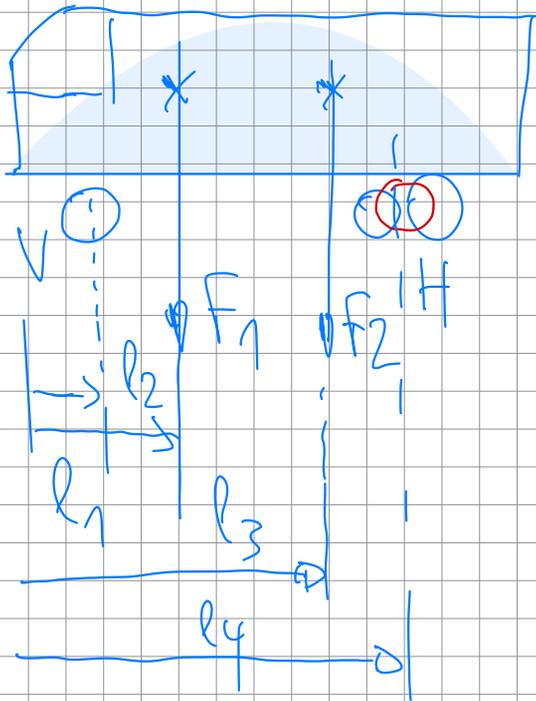
$$l_3 = 0,7 \text{ m}$$

$$F_1 = 3020 \text{ N}$$

$$F_2 = 2020 \text{ N}$$

$$F_S = 25 \text{ kN}$$

Aufgabe 2



$$l_1 = 0,5 \text{ m}$$

$$l_2 = 1,6 \text{ m}$$

$$l_3 = 3,5 \text{ m}$$

$$l_4 = 4,7 \text{ m}$$

$$F_1 = 100 \text{ N}$$

$$F_2 = 140 \text{ N}$$

- Freischnitt
- Bilanz
- F_v ; F_H





$$\sum F_y = F_v - F_1 - F_2 + F_H = 0$$

$$\sum M_v = -M_{F_1} - M_{F_2} + M_{F_H} = 0$$

$$-F_1 \cdot (l_2 - l_1) - F_2 \cdot (l_3 - l_1) + F_H \cdot (l_4 - l_1) = 0$$

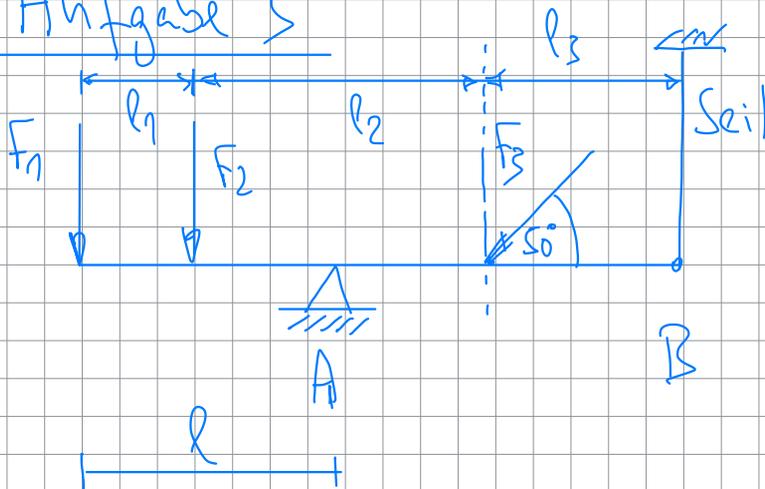
$$\Rightarrow F_H = \frac{F_1 \cdot (l_2 - l_1) + F_2 \cdot (l_3 - l_1)}{l_4 - l_1}$$

$$= 1290 \text{ N}$$

$$\Rightarrow F_v = F_1 + F_2 - F_H = 111 \text{ N}$$



Aufgabe 3



$$F_1 = 300 \text{ N}$$

$$F_2 = 200 \text{ N}$$

$$F_3 = 500 \text{ N}$$

$$l = 2,5 \text{ m}$$

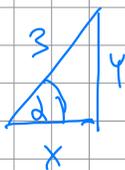
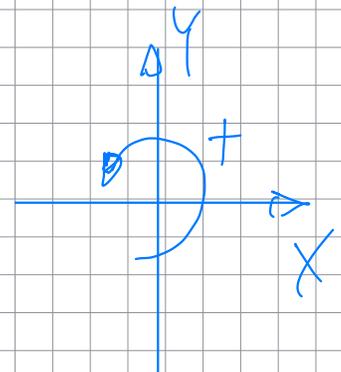
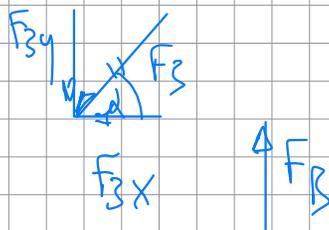
$$l_1 = 2 \text{ m}$$

$$l_2 = 4 \text{ m}$$

$$l_3 = 3,5 \text{ m}$$

a) Freischnitt

b) F_A, F_B



$$F_{3x} = F_3 \cdot \cos 50^\circ = 321 \text{ N}$$

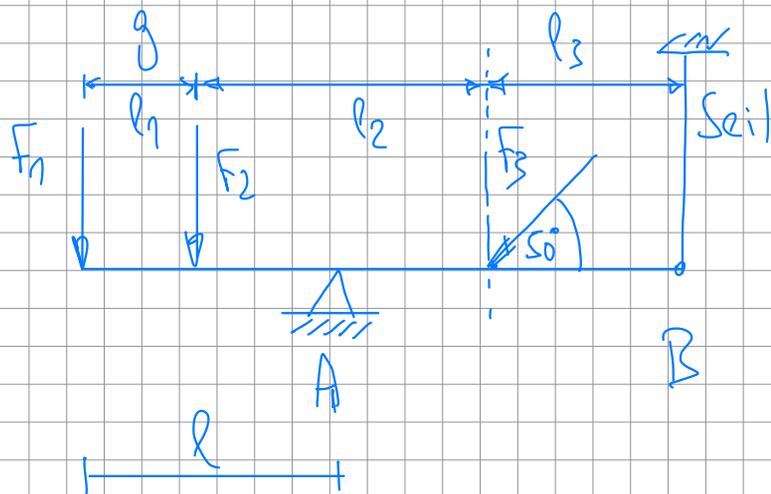
$$F_{3y} = F_3 \cdot \sin 50^\circ = 383 \text{ N}$$

$$\sum F_x = F_{Ax} - F_{3x} = 0 \Rightarrow F_{Ax} = F_{3x} = \underline{321 \text{ N}}$$

$$\sum F_y = -F_1 - F_2 + F_{Ay} - F_{3y} + F_B = 0$$



$$\sum M_A = M_{F_1} + M_{F_2} - M_{F_3} + M_{F_B} = 0$$



$$M = F \cdot l$$

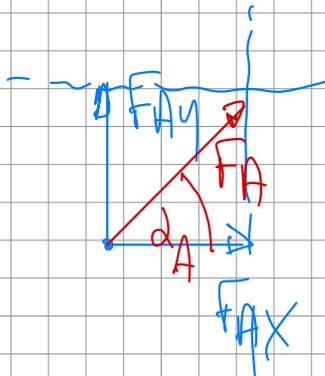
$$F \perp l$$

$$F_1 \cdot l + F_2 (l - l_1) - F_3 (l_1 + l_2 - l) + F_B (l_1 + l_2 + l_3) = 0$$

$$F_B = \frac{-F_1 \cdot l - F_2 (l - l_1) + F_3 (l_1 + l_2 - l)}{l_1 + l_2 + l_3 - l}$$

$$= \underline{70 \text{ N}} \quad \text{in (2)}$$

$$F_{Ay} = F_1 + F_2 + F_{3y} - F_B = \underline{813 \text{ N}}$$



$$F_A^2 = F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2$$

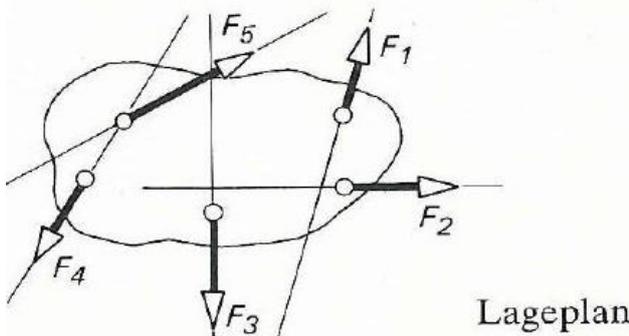
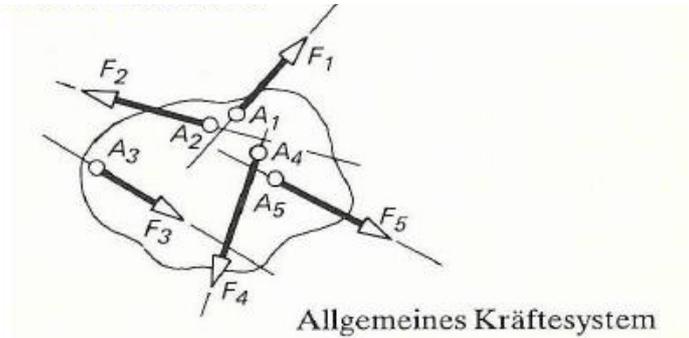
$$\Rightarrow F_A = \underline{874 \text{ N}}$$

$$\tan \alpha_A = \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}}$$

$$\Rightarrow \alpha_A = \underline{\hspace{2cm}}$$

Allgemeines Kräftesystem

Ein allgemeines Kräftesystem liegt vor, wenn sich die Wirklinien der Kräfte nicht in einem gemeinsamen Punkt schneiden. Ein allgemeines Kräftesystem kann ein Bauteil verschieben und auch drehen.



Lagerkräfte im Allgemeinen Kräftesystem

Das Ziel der nachfolgend vorgestellten Verfahren dient der Ermittlung unbekannter Stütz- und Lagerkräfte. Es gibt hierzu eine rechnerische und zwei zeichnerische Lösungsansätze.

Das Drei-Kräfte-Verfahren

Voraussetzungen für das 3-Kräfteverfahren

Das 3-Kräfteverfahren kann verwendet werden, wenn die folgenden Voraussetzungen gegeben sind:

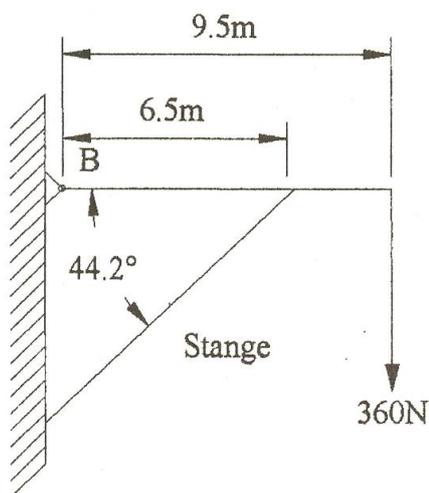
- Gegeben sind genau 3 Kräfte
- Kraft 1: vollständig bekannt (die äußere Belastung)
- Kraft 2: nur die Wirklinie ist bekannt (einwertiges Lager)
- Kraft 3: Wirklinie und Betrag sind unbekannt (zweiwertiges Lager)
- Gesucht ist Betrag und Richtung von Kraft 3 und der Betrag von Kraft 2
- Einschränkung: Die bekannten Wirklinien dürfen nicht parallel liegen

Drei nicht parallele Kräfte stehen im Gleichgewicht, wenn die Wirklinien der Kräfte sich in einem Punkt schneiden und das Kräfteck sich schließt.

Vorgehensweise

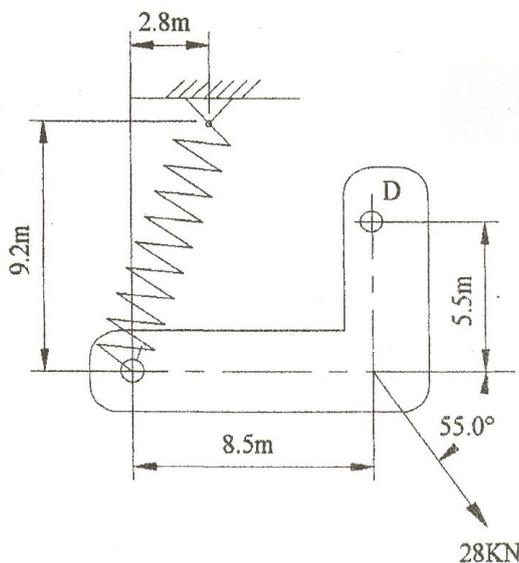
- Maßstäblichen Lageplan zeichnen und damit Wirklinien der Belastungen und der einwertigen Stützkraft festlegen.
- Bekannte Wirklinien der äußeren Kraft und des einwertigen Lagers schneiden → Schnittpunkt S.
- Verbinden Sie den Punkt S mit dem zweiwertigen Lager verbinden → unbekannte Wirklinie
- Im maßstäblichen Kräfteplan das Kräfteck entwickeln, beginnend mit der bekannten äußeren Kraft → Parallelverschiebung der Wirklinien aus dem Lageplan → Kräfteck schließen, Kräfte ausmessen.

Aufgabe 1



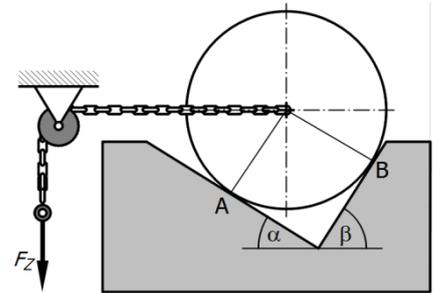
Aufgabe 2

Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch die Lagerkraft im Punkt D nach Betrag und Richtung sowie die Kraft der Zugfeder.



Aufgabe 1

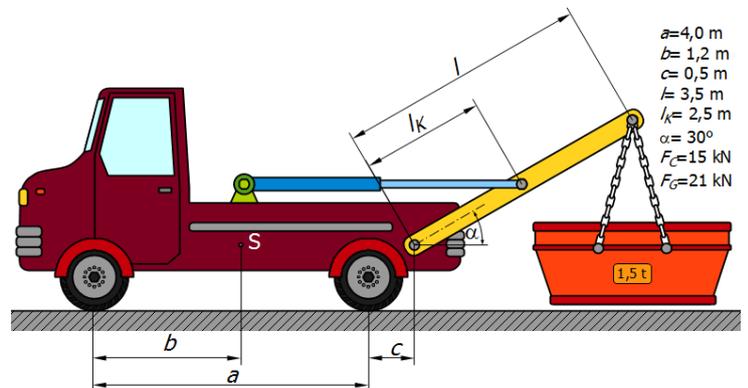
Eine Walze der Masse 40 kg wird in einer prismatischen Nut (Auflagepunkte A und B) gehalten. Über eine Umlenkrolle wird mit einer Kraft F_Z an der Walze gezogen. Für die Winkel gilt $\alpha = 30^\circ$ und $\beta = 60^\circ$.



- Schneiden Sie die Walze frei und tragen Sie alle wirkenden Kräfte sowie die entsprechenden Winkel ein.
- Bestimmen Sie zeichnerisch die Auflagekräfte F_A und F_B in den Punkten A und B, wenn nicht an der Walze gezogen wird.

Aufgabe 2

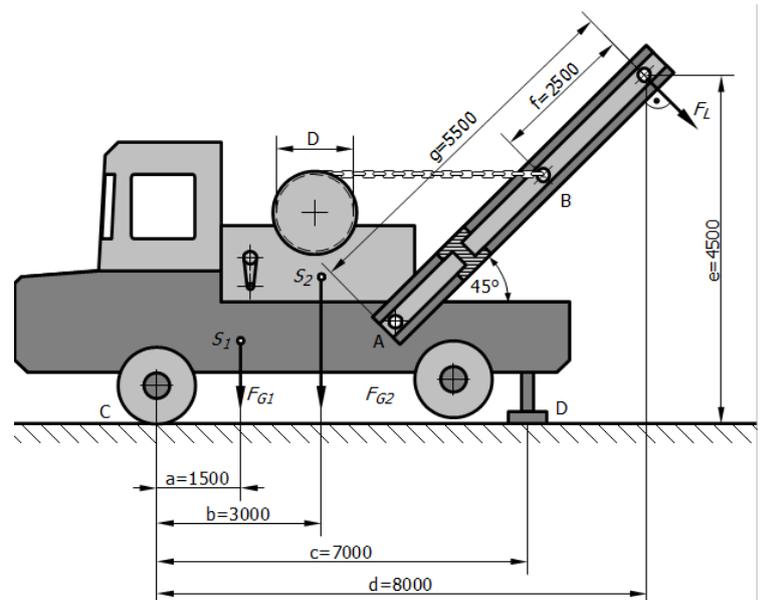
Ein Containerfahrzeug (Gewichtskraft $F_G = 21$ kN im Schwerpunkt S angreifend) hebt über den drehbaren Tragarm einen Container (Gewichtskraft $F_C = 15$ kN) mithilfe eines Hydraulikzylinders. Die Masse des Tragarms ist gegenüber dem Container vernachlässigbar.



- Wie groß sind die Kolbenkraft F_K und die Lagerkraft F_L im Drehlager? Lösen Sie zeichnerisch und überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Rechnung.
- Wie groß sind die Kräfte, die auf die Vorder- und Hinterachse wirken?
- Bis zu welchem Winkel α kann der Tragarm geschwenkt werden, bevor das Fahrzeug kippt?

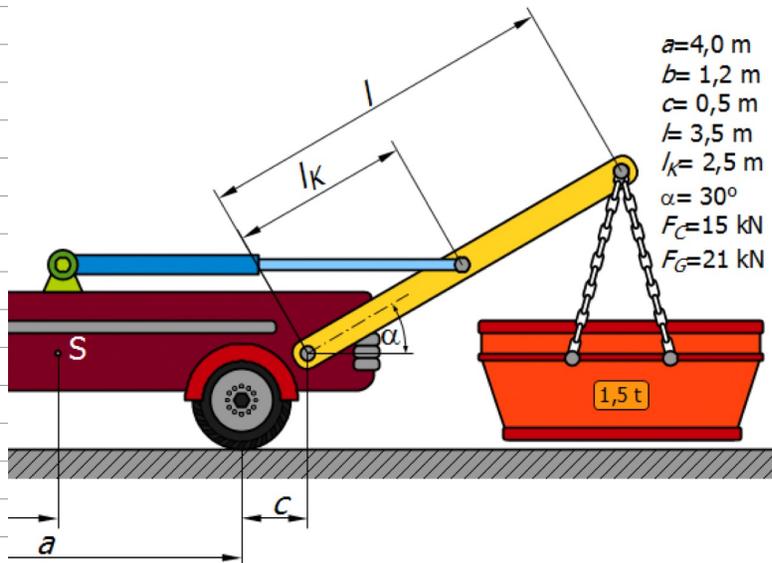
Aufgabe 3

Annahmen: Alle Kräfte sind auf eine Fahrzeugseite bezogen. Das Hinterrad ist durch die Stütze in D entlastet. In den Schwerpunkten S_1 und S_2 greifen die Gewichtskräfte $F_{G1} = 100$ kN und $F_{G2} = 10$ kN an. Am Ausleger wirkt die Kraft $F_L = 50$ kN.

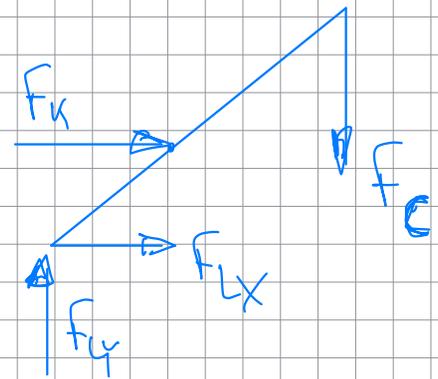


- b) a) Ermitteln Sie zeichnerisch die Lagerkräfte in A und B.
a) b) Bestimmen Sie rechnerisch die Aufstandskräfte in C und D.

Aufgabe 2

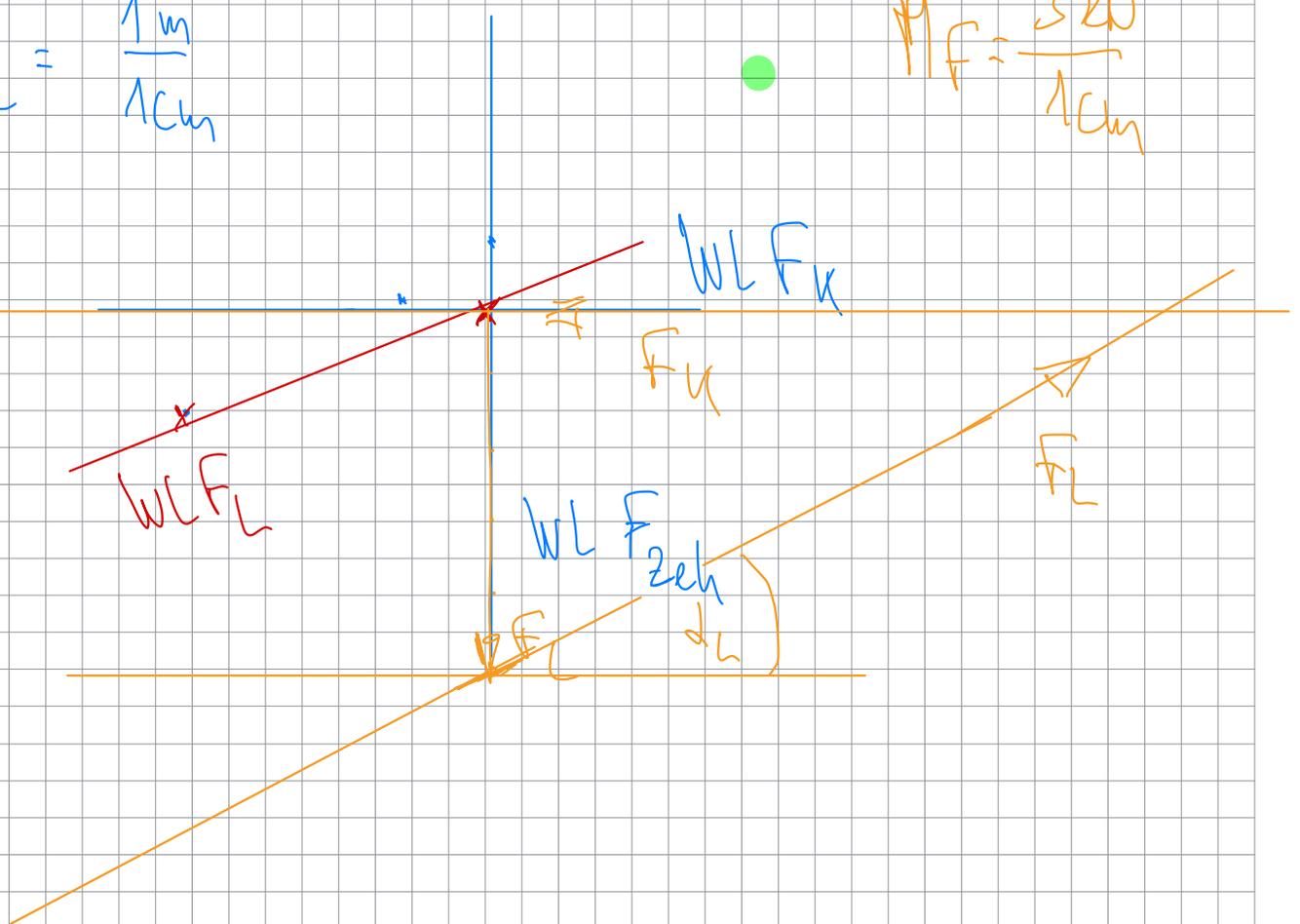


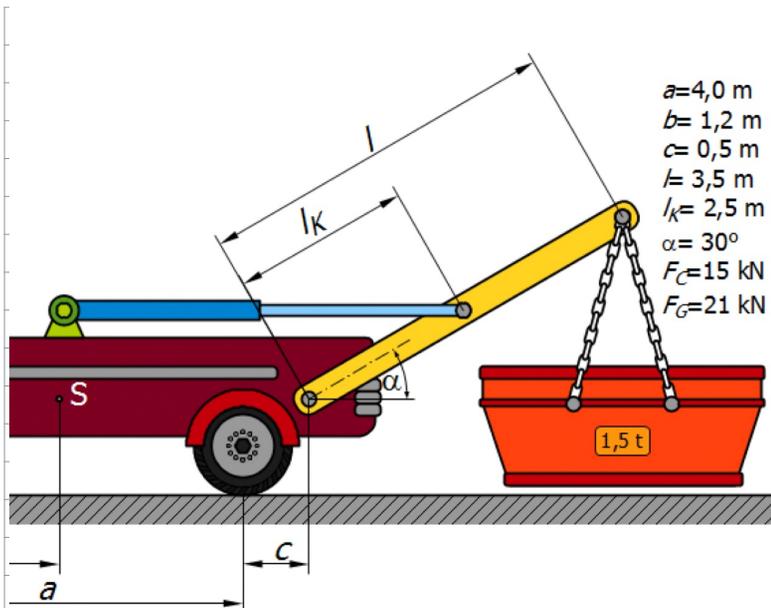
$a=4,0\text{ m}$
 $b=1,2\text{ m}$
 $c=0,5\text{ m}$
 $l=3,5\text{ m}$
 $l_k=2,5\text{ m}$
 $\alpha=30^\circ$
 $F_C=15\text{ kN}$
 $F_G=21\text{ kN}$



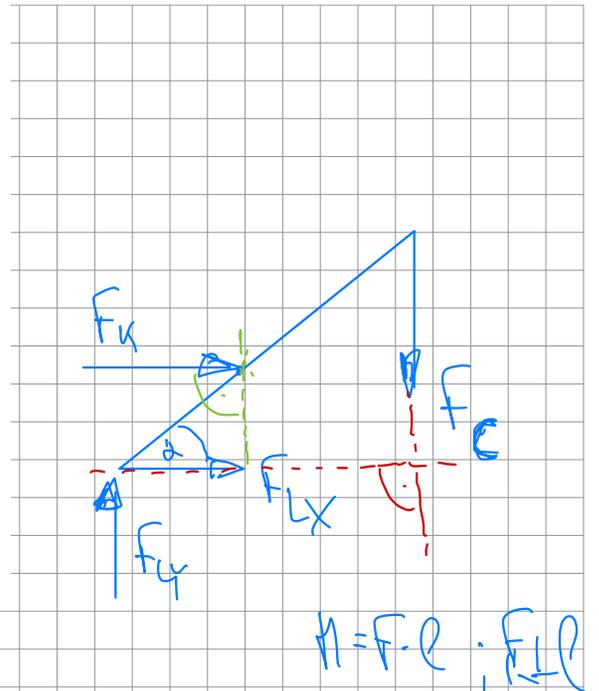
$$M_L = \frac{1\text{ m}}{1\text{ cm}}$$

$$M_F = \frac{320}{1\text{ cm}}$$





$a=4,0 \text{ m}$
 $b=1,2 \text{ m}$
 $c=0,5 \text{ m}$
 $l=3,5 \text{ m}$
 $l_k=2,5 \text{ m}$
 $\alpha=30^\circ$
 $F_C=15 \text{ kN}$
 $F_G=21 \text{ kN}$



$$\sum F_x = F_{Lx} + F_k = 0$$

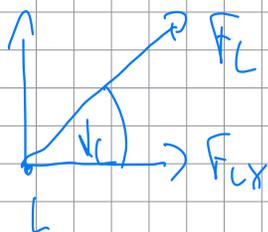
$$\sum F_y = F_{Ly} - F_c = 0 \Rightarrow F_{Ly} = F_c = \underline{15 \text{ kN}}$$

$$\sum M_L = -M_{F_k} - M_{F_c} = 0$$

$$-F_k \cdot l_k \cdot \sin \alpha - F_c \cdot l \cdot \cos \alpha = 0$$

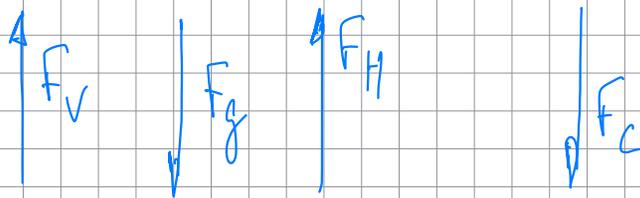
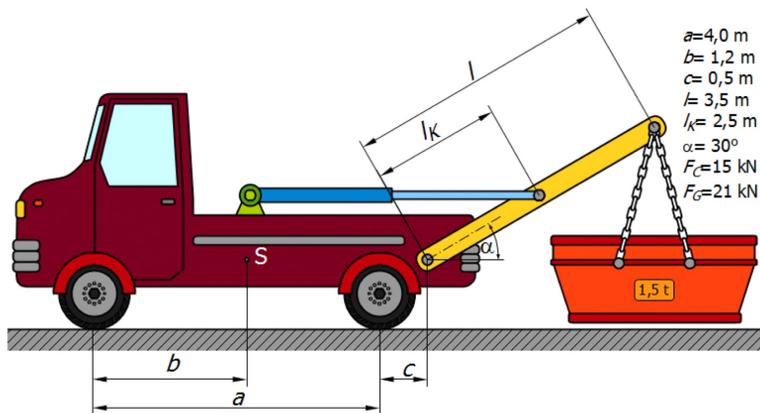
$$\Rightarrow F_k = -\frac{F_c \cdot l \cdot \cos \alpha}{l_k \cdot \sin \alpha} = \underline{-36,4 \text{ kN}}$$

$$F_{Lx} \Rightarrow F_{Lx} = -F_k = \underline{36,4 \text{ kN}}$$



$$F_L = \underline{39,3 \text{ kN}}$$

$$\alpha_L = \tan^{-1} \left(\frac{F_{Ly}}{F_{Lx}} \right) = \underline{22,4^\circ}$$



$$\sum F_y = F_v - F_g + F_H - F_c = 0$$

$$\sum M_v = -M_{F_g} + M_{F_H} - M_{F_c} = 0$$

$$-F_g \cdot b + F_H \cdot a - F_c (a + c + l \cdot \cos \alpha) = 0$$

$$F_H = \frac{F_c \cdot (a + c + l \cdot \cos \alpha) + F_g \cdot b}{a} = \underline{\underline{34,5 \text{ kN}}}$$

$$F_v = F_g - F_H + F_c = \underline{\underline{1,5 \text{ kN}}}$$



c) Kippen $\Rightarrow F_V = 0$



$$M_{F_c} \geq M_{F_g}$$

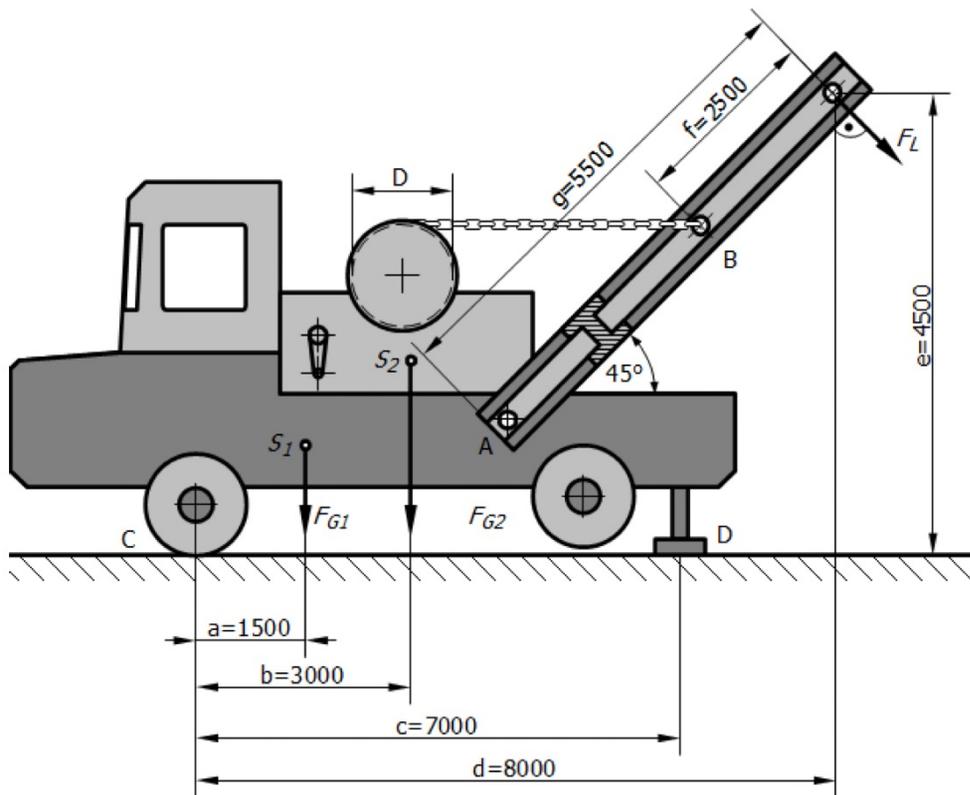
$$F_c \cdot (c + l \cdot \cos \alpha) = F_g \cdot (a - b)$$

$$F_c \cdot c + F_c \cdot l \cdot \cos \alpha = F_g (a - b)$$

$$F_c \cdot l \cdot \cos \alpha = F_g (a - b) - F_c \cdot c$$

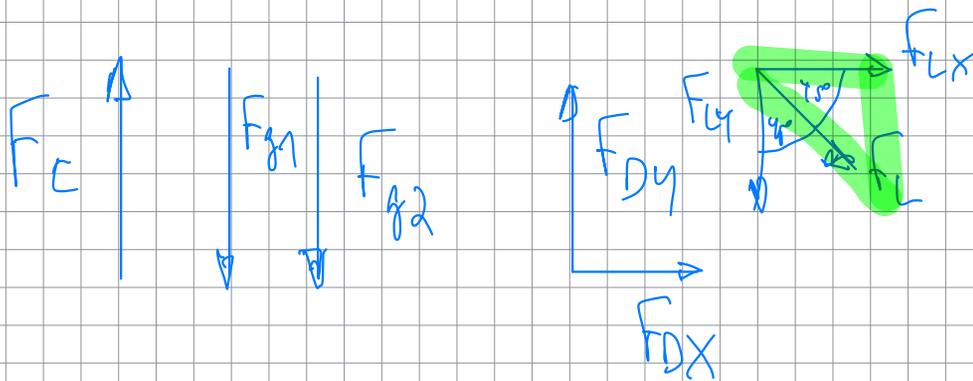
$$\cos \alpha = \frac{F_g (a - b) - F_c \cdot c}{F_c \cdot l}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 12,3^\circ}}$$



$$F_{Lx} = F_L \cdot \cos 45^\circ$$

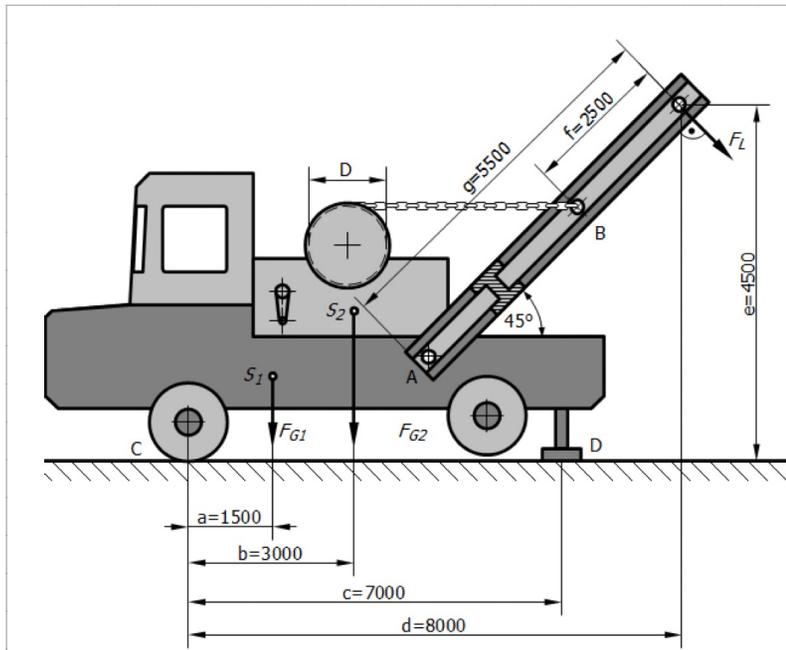
$$F_{Ly} = F_L \cdot \sin 45^\circ$$



$$\sum F_x = F_{DX} + F_{Lx} = 0$$

$$F_{DX} = -F_{Lx} = \underline{\underline{-35,4 \text{ kN}}}$$

$$\sum F_y = F_C - F_{G1} - F_{G2} + F_{Dy} - F_{Ly} = 0$$



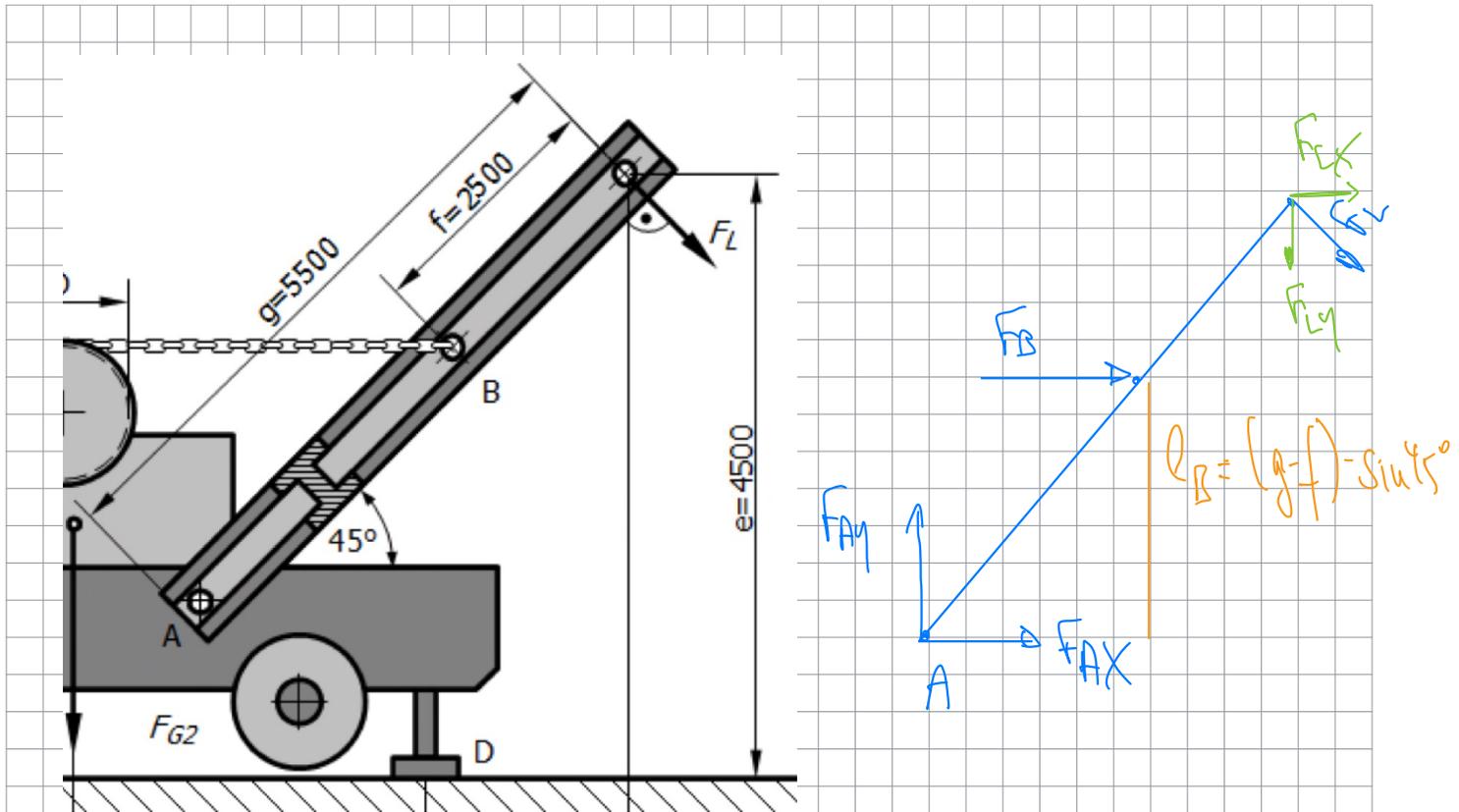
$$\sum M_C = -M_{F_{G1}} - M_{F_{G2}} + M_{F_{Dy}} - M_{F_{Lx}} - M_{F_{Lx}} = 0$$

$$-F_{G1} \cdot a - F_{G2} \cdot b + F_{Dy} \cdot c - F_{Lx} \cdot d - F_{Lx} \cdot e = 0$$

$$F_{Dy} = \frac{F_{G1} \cdot a + F_{G2} \cdot b + F_L \cdot \sin 45^\circ \cdot d + F_C \cdot \cos 45^\circ \cdot e}{c}$$

$$= 88,89 \text{ kN}$$

$$F_C = F_{G1} + F_{G2} + F_{Lx} - D_{Dy} = 56,5 \text{ kN}$$



Zerlegen schräger Kräfte:

$$F_{Lx} = F_L \cdot \cos 45^\circ = 35,4 \text{ kN}$$

$$F_{Ly} = F_L \cdot \sin 45^\circ = 35,4 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = F_{Ax} + F_B + F_{Lx} = 0$$

$$\sum F_y = F_{Ay} - F_{Ly} = 0$$

$$\Rightarrow F_{Ay} = F_{Ly} = \underline{\underline{35,4 \text{ kN}}}$$



$$\sum M_A = -M_{FB} - M_{FL} = 0$$

$$-F_B \cdot l_B - F_L \cdot g = 0$$

$$-F_B \cdot (g-f) \cdot \sin 45^\circ - F_L \cdot g = 0$$

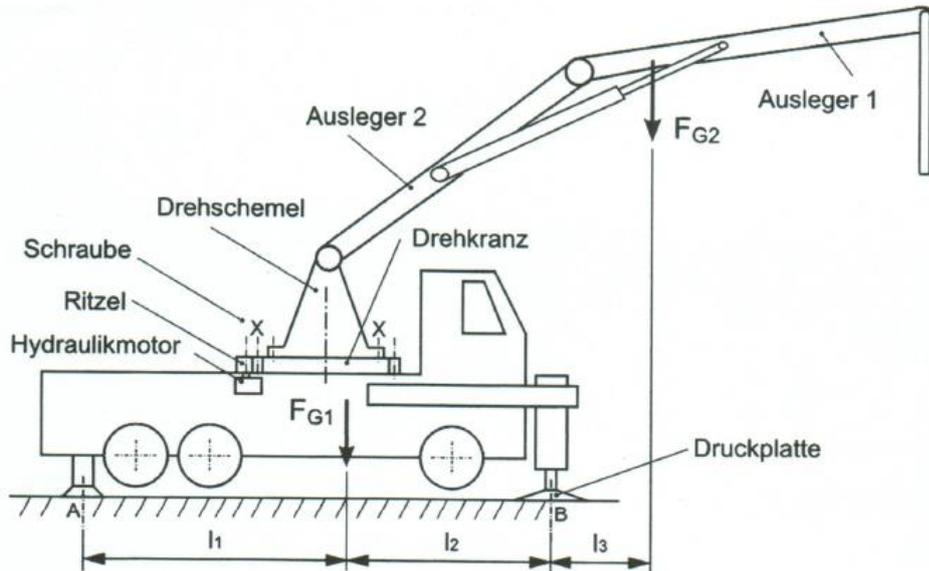
$$\Rightarrow F_B = - \frac{F_L \cdot g}{(g-f) \cdot \sin 45^\circ} = \underline{\underline{-129,6 \text{ N}}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F_{AX} = 94,2 \text{ N}}}$$

$$F_A = \sqrt{F_{AX}^2 + F_{AY}^2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan \alpha_A = \frac{F_{AY}}{F_{AX}} \Rightarrow \downarrow A$$

Autobetonpumpe

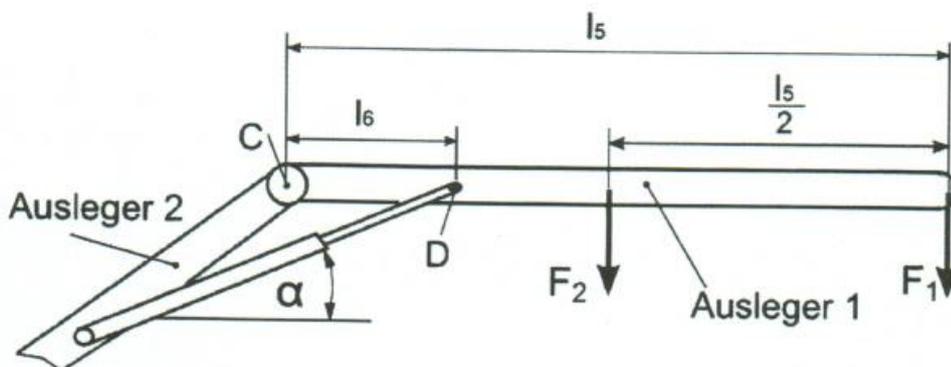


Daten:

$l_1 = 4,0 \text{ m}$	Fahrzeug:	$F_{G1} = 100 \text{ kN}$
$l_2 = 3,3 \text{ m}$	Ausleger gesamt:	$F_{G2} = 60 \text{ kN}$
$l_3 = 2,8 \text{ m}$		

- Berechnen Sie die Aufstandskräfte in A und B.

Der Ausleger 1 ist in waagrechter Position.



Daten:

$l_5 = 6,0 \text{ m}$	$\alpha = 30^\circ$	$F_1 = 5 \text{ kN}$
$l_6 = 1,5 \text{ m}$		$F_2 = 20 \text{ kN}$

- Ermitteln Sie die Kräfte im Punkt C und D.



a) Freischnitt



Bilanzen

$$\sum F_y = F_A - F_{g1} + F_B - F_{g2} = 0$$

$$\sum M_A = -M_{F_{g1}} + M_{F_B} - M_{F_{g2}} = 0$$

$$-F_{g1} \cdot l_1 + F_B (l_1 + l_2) - F_{g2} (l_1 + l_2 + l_3) = 0$$

$$\Rightarrow F_B = \frac{F_{g1} \cdot l_1 + F_{g2} \cdot (l_1 + l_2 + l_3)}{l_1 + l_2} = \underline{\underline{137,8 \text{ kN}}}$$

$$\Rightarrow F_A = \underline{\underline{22,2 \text{ kN}}}$$

Einschub: $F_{g2, \text{max}}$ für Kippen

$$F_A = 0$$

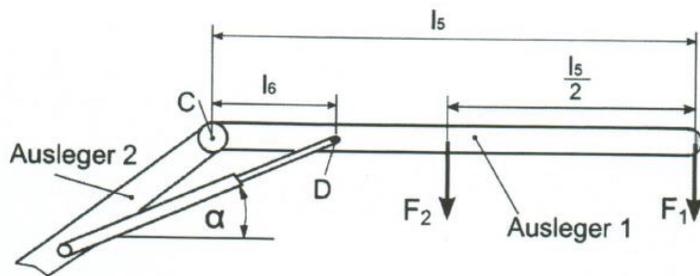
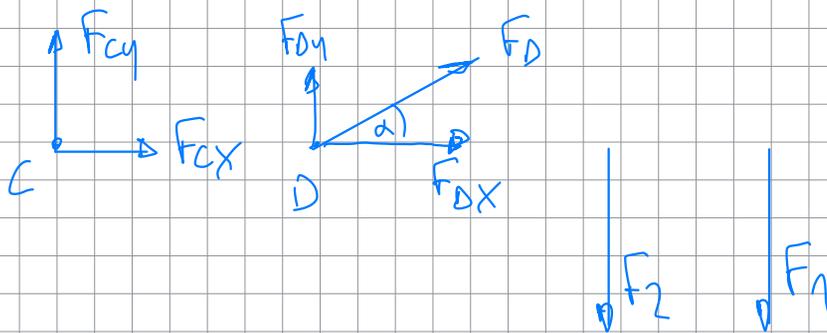
Kippkante bei B



$$F_{g2, \max} \cdot l_3 = F_{g1} \cdot l_2$$

$$\Rightarrow F_{g2, \max} = F_{g1} \cdot \frac{l_2}{l_3} = \underline{\underline{117,9 \text{ kN}}}$$

Freischnitt Ausleger



Daten:

$$l_5 = 6,0 \text{ m} \quad \alpha = 30^\circ \quad F_1 = 5 \text{ kN}$$

$$l_6 = 1,5 \text{ m} \quad F_2 = 20 \text{ kN}$$

- Ermitteln Sie die Kräfte im Punkt C und D.

$$F_{DX} = F_D \cdot \cos \alpha$$

$$F_{DY} = F_D \cdot \sin \alpha$$

$$\sum F_x = F_{Cx} + F_{Dx} = 0$$

$$\sum F_y = F_{Cy} + F_{Dy} - F_2 - F_1 = 0$$

$$\sum M_C = M_{F_{Dy}} - M_{F_1} - M_{F_2} = 0$$



$$F_{Dy} \cdot l_b - F_2 \cdot \frac{l_s}{2} - F_1 \cdot l_s = 0$$

$$\Rightarrow F_{Dy} = \frac{F_2 \cdot \frac{l_s}{2} + F_1 \cdot l_s}{l_b} = \underline{\underline{60 \text{ N}}}$$

$$\Rightarrow F_{Cy} = F_2 + F_1 - F_{Dy} \\ = \underline{\underline{-35 \text{ N}}}$$

$$F_{Dy} = F_D \cdot \sin \alpha \Rightarrow F_D = \frac{F_{Dy}}{\sin 30^\circ} = \underline{\underline{120 \text{ N}}}$$

$$\Rightarrow F_{Dx} = F_D \cdot \cos \alpha = \underline{\underline{103,9 \text{ N}}}$$

$$\Rightarrow F_{Cx} = -F_{Dx} = \underline{\underline{-103,9 \text{ N}}}$$

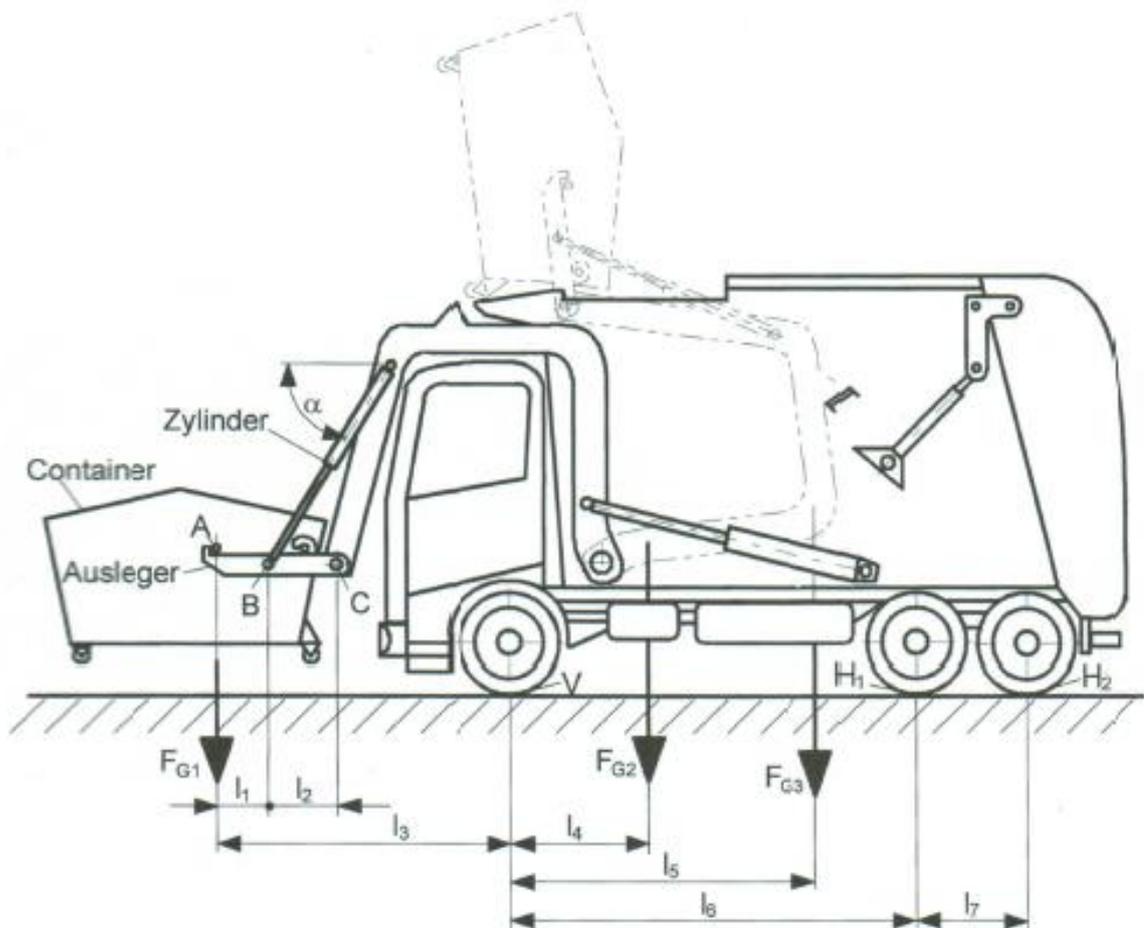


$$F_C = \sqrt{F_{Cx}^2 + F_{Cy}^2} = \underline{\underline{109,6 \text{ N}}}$$

$$\tan \alpha_c = \frac{F_{Cx}}{F_{Cy}} \Rightarrow \alpha_c = \underline{\underline{71,4^\circ}}$$

Müllsammelfahrzeug

Das Müllsammelfahrzeug entleert die Container über das Führerhaus.



Daten:

Gewichtskraft Container:

Gewichtskraft Fahrzeug mit Aufbau:

Maximale Zuladung:

$$l_1 = 500 \text{ mm}$$

$$l_2 = 800 \text{ mm}$$

$$l_3 = 3400 \text{ mm}$$

$$l_4 = 1600 \text{ mm}$$

$$F_{G1} = 10 \text{ kN}$$

$$F_{G2} = 190 \text{ kN}$$

$$F_{G3} = 120 \text{ kN}$$

$$\alpha = 58^\circ$$

$$l_5 = 3400 \text{ mm}$$

$$l_6 = 4800 \text{ mm}$$

$$l_7 = 1200 \text{ mm}$$

- Berechnen Sie die Aufstandskräfte der Einzelräder F_V , F_{H1} und F_{H2} bei maximaler Zuladung und angehobenem Container. Hierbei gilt $F_{H1} = F_{H2}$.
- Beweisen Sie durch Rechnung, dass das leere Fahrzeug den Container ohne zu kippen anheben kann.
- Bestimmen Sie für eine Seite die Kräfte F_B und F_C im Ausleger. Zeichnerische Lösung.



a)



$$\sum F_y = -F_{g1} + F_v - F_{g2} - F_{g3} + F_H = 0$$

$$\sum M_v = F_{g1} \cdot l_3 - F_{g2} \cdot l_4 - F_{g3} \cdot l_5 + F_H \cdot (l_6 + \frac{1}{2}l_7) = 0$$

$$\Rightarrow F_H = \frac{-F_{g1} \cdot l_3 + F_{g2} \cdot l_4 + F_{g3} \cdot l_5}{l_6 + \frac{1}{2}l_7} = \underline{\underline{125,6 \text{ kN}}}$$

$$\Rightarrow F_v = \underline{\underline{194,4 \text{ kN}}}$$

$$b) \quad M_1 = F_{g1} \cdot l_3 = \underline{\underline{349 \text{ kNm}}}$$

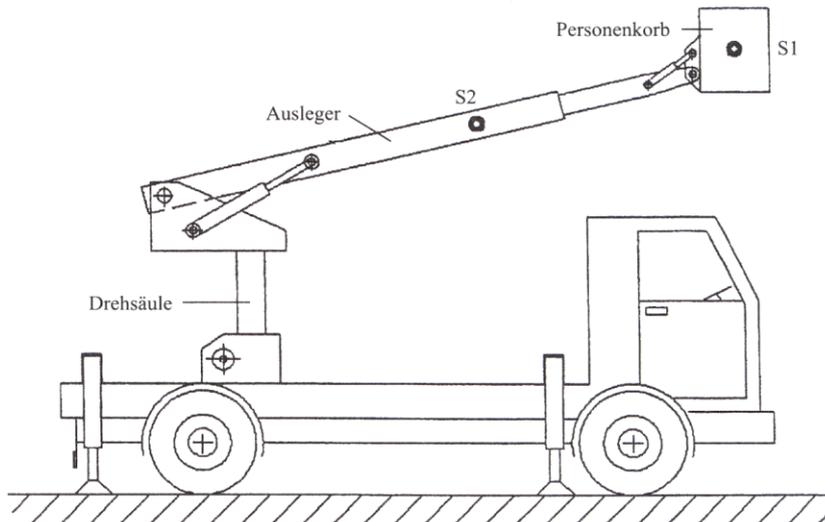
$$M_2 = F_{g2} \cdot l_4 = \underline{\underline{304 \text{ kNm}}}$$

da $M_2 > M_1 \Rightarrow$ Fahrzeug kippt nicht!

Auszug aus Abiturprüfung 2002

Hebebühne

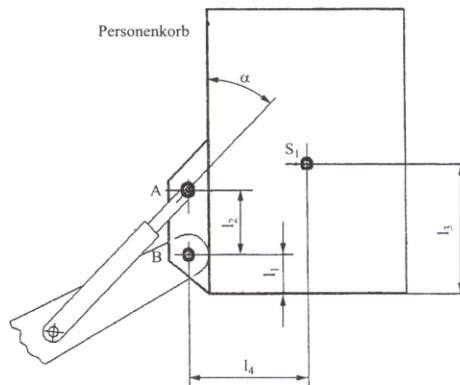
Die Hebebühne besteht aus einer drehbaren Säule, einem Ausleger und einem Personenkorb. Der Ausleger lässt sich mit einem Teleskopaus Schub verlängern, in seiner Neigung hydraulisch verstellen und durch einen Drehzylinder horizontal schwenken. Der Personenkorb wird ebenfalls mit einem Hydraulikzylinder immer in senkrechter Lage gehalten.



Teilaufgaben

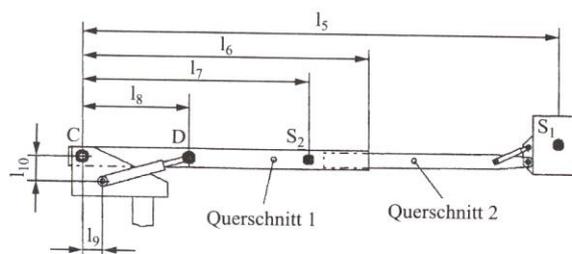
1 Personenkorb: Ermitteln Sie zeichnerisch die Lagerkräfte in A und B.

- Daten: $l_1 = 150 \text{ mm}$
 $l_2 = 250 \text{ mm}$
 $l_3 = 500 \text{ mm}$
 $l_4 = 480 \text{ mm}$
 $F_{G1} = 5 \text{ kN}$
 $\alpha = 45^\circ$



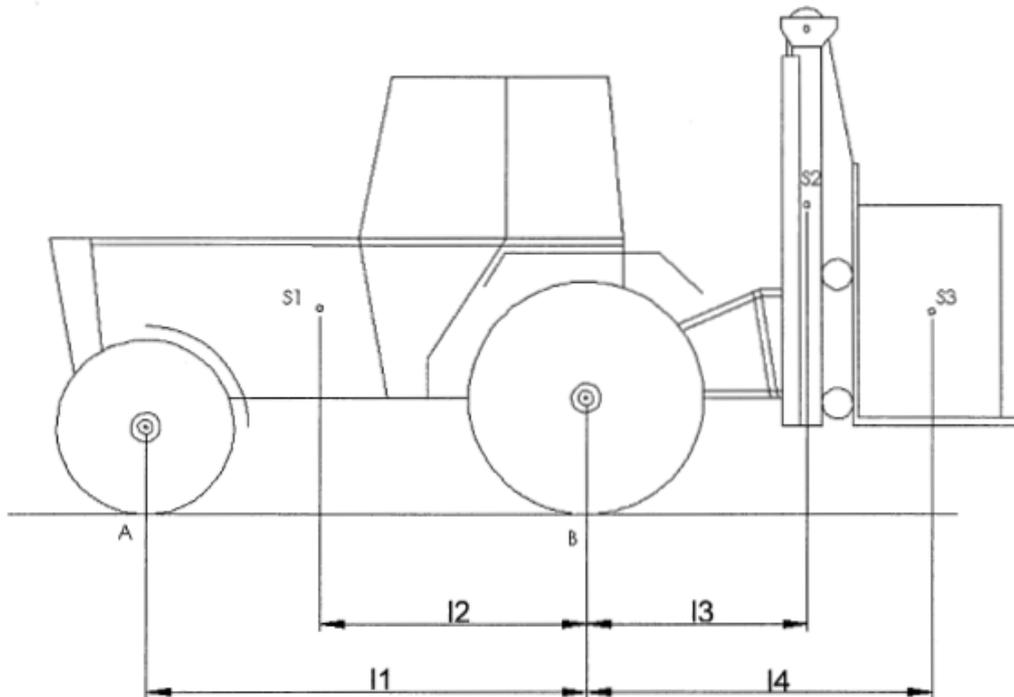
Bei den nachfolgenden Teilaufgaben befindet sich der Ausleger in waagrechter Lage. Die Gewichtskraft F_{G1} greift bei S_1 an, F_{G2} bei S_2 .

- Daten: $l_5 = 8400 \text{ mm}$
 $l_6 = 4400 \text{ mm}$
 $l_7 = 3300 \text{ mm}$
 $l_8 = 1700 \text{ mm}$
 $l_9 = 400 \text{ mm}$
 $l_{10} = 450 \text{ mm}$
 $F_{G1} = 5 \text{ kN}$
 $F_{G2} = 17 \text{ kN}$



2 Berechnen Sie die Lagerkräfte in C und D.

Apfelbauer Huber verwendet die Hubeinrichtung an seinem Traktor für den Transport von Großkisten.



Abmessungen : $l_1 = 2300 \text{ mm}$, $l_2 = 1000 \text{ mm}$, $l_3 = 1200 \text{ mm}$, $l_4 = 1600 \text{ mm}$
(unmaßstäblich)

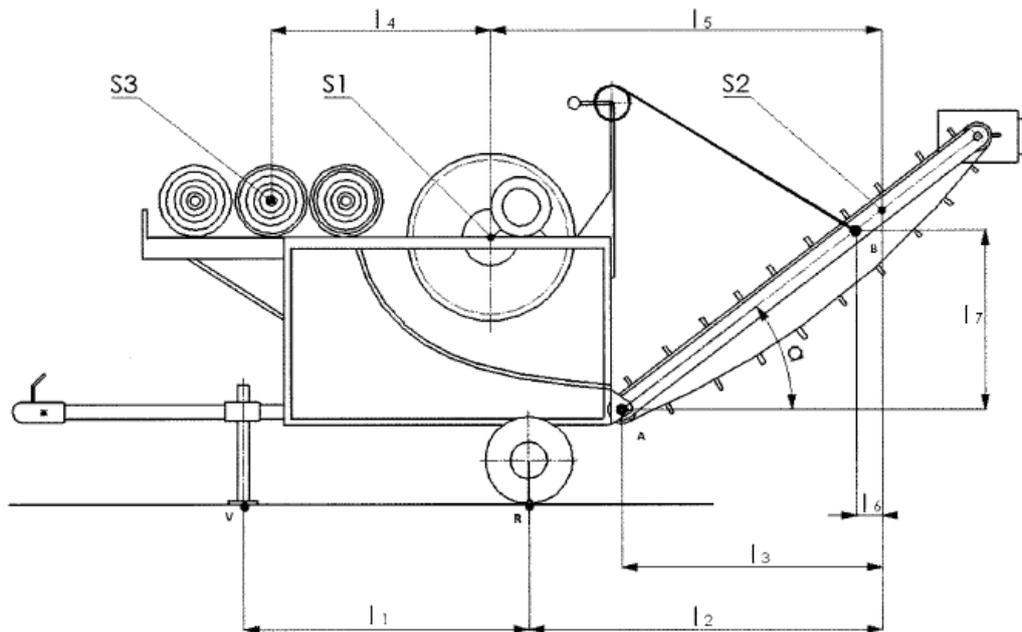
Gewichtskräfte: $F_{G1} = 17 \text{ kN}$ (in S1), $F_{G2} = 5 \text{ kN}$ (in S2), $F_{G3} = 0,8 \text{ kN}$ (in S3) Leergewicht

1.1 Traktor mit Hubeinrichtung

1.1.1 Schneiden Sie den Traktor mit Hubeinrichtung und leerer Großkiste frei. Berechnen Sie die Achskräfte F_A und F_B .

1.1.2 Die Großkiste wird mit Äpfeln beladen. Ein Apfel wiegt im Schnitt 170 Gramm. Überprüfen Sie durch Berechnung die maximale Anzahl an Äpfeln, die Bauer Huber in eine Großkiste laden kann, ohne dass sein Traktor kippt.

In seiner Grundstellung steht der Sägeautomat auf zwei Rädern und einer Stütze in waagerechter Position.



Sägeautomat

Darstellung unmaßstäblich

Daten

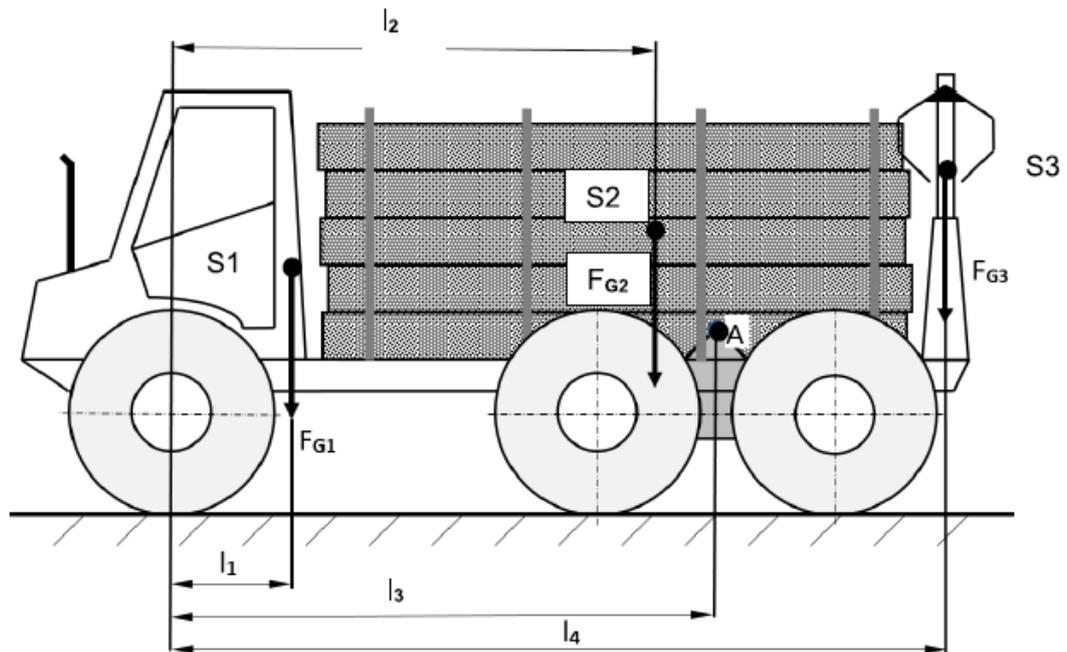
Sägeautomat: $F_{G1} = 4500 \text{ N}$ in S1
 Förderband: $F_{G2} = 1150 \text{ N}$ in S2
 Baumstücke: $F_{G3} = 1800 \text{ N}$ in S3

Abmessungen: $l_1 = 1750 \text{ mm}$
 $l_2 = 1880 \text{ mm}$
 $l_3 = 1450 \text{ mm}$
 $l_4 = 1100 \text{ mm}$
 $l_5 = 2400 \text{ mm}$
 $l_6 = 200 \text{ mm}$
 $l_7 = 920 \text{ mm}$

- 1.1 Machen Sie den Sägeautomat in seiner Grundstellung frei.
- 1.2 Berechnen Sie die Achskraft F_R , sowie die Stützkraft F_V .
- 1.3 Für Wartungsarbeiten wird das Förderband mit Hilfe der Hebevorrichtung abgesenkt. Währenddessen liegen keine Baumstücke auf dem Zuführtisch ($F_{G3} = 0$).
- 1.3.1 Berechnen Sie, welche Länge $l_{3\text{neu}}$ zulässig ist, ohne dass der Anhänger kippt.

Der HolZRückeschlepper transportiert die Holzstämme aus dem Wald in das Sägwerk. Hierzu greift er mit seinem Ladekran die bereits auf 5 Meter Länge zugesägten Baumstämme und legt sie auf seiner Ladefläche ab.

Beide Hinterachsen sind in Punkt A so gelagert, dass die Belastung auf alle 4 Hinterräder gleich verteilt wird.



Holzrückeschlepper

Darstellung unmaßstäblich

Daten

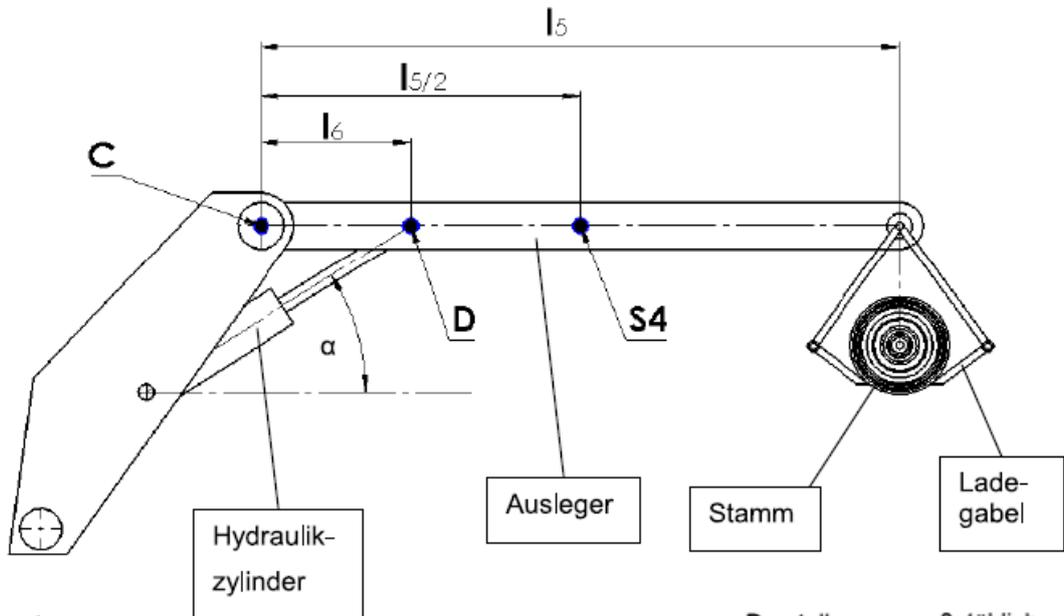
Holzrückeschlepper:	$F_{G1} = 40 \text{ kN}$ in S1	Abmessungen:	$l_1 = 800 \text{ mm}$
Holzstämme:	$F_{G2} = 70 \text{ kN}$ in S2		$l_2 = 3800 \text{ mm}$
Ladekran:	$F_{G3} = 5 \text{ kN}$ in S3		$l_3 = 4500 \text{ mm}$
			$l_4 = 6000 \text{ mm}$

1.1 HolZRückeschlepper

1.1.1 Machen Sie den vollbeladenen HolZRückeschlepper frei.

1.1.2 Berechnen Sie die Radkräfte $F_{V\text{Rad}}$ an der Vorderachse und die einzelnen Radkräfte $F_{H\text{Rad}}$ an den Hinterachsen.

Der Holzurückeschlepper hat einen Stamm mit dem Ladekran gegriffen und angehoben. Der Ausleger befindet sich in waagerechter Position und wird von einem Hydraulikzylinder in dieser Stellung gehalten.



Ladekran im Einsatz

Darstellung unmaßstäblich

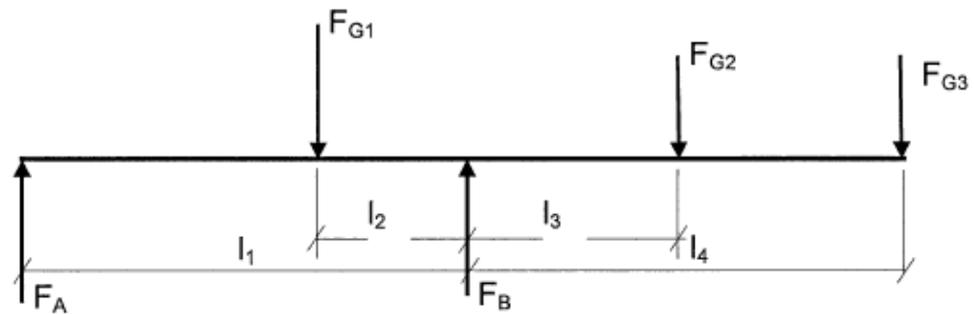
Daten

Ausleger: $F_{G4} = 2 \text{ kN}$ im Punkt S4
 Stamm: $F_{G5} = 3,5 \text{ kN}$
 Winkel: $\alpha = 35^\circ$

Abmessungen: $l_5 = 2000 \text{ mm}$
 $l_6 = 450 \text{ mm}$

1.2.1 Schneiden Sie den Ausleger frei und ermitteln Sie die Kräfte an den Punkten C und D.

Traktor mit Hubeinrichtung



$$\sum M_{(B)} = 0 \Rightarrow$$

$$F_{G1} \cdot l_2 - F_{G2} \cdot l_2 - F_{G3} \cdot l_4 = F_A \cdot l_1$$

$$F_A = \frac{F_{G1} \cdot l_2 - F_{G2} \cdot l_2 - F_{G3} \cdot l_4}{l_1}$$

$$F_A = \frac{17 \text{ kN} \cdot 1000 \text{ mm} - 5 \text{ kN} \cdot 1200 \text{ mm} - 0,8 \text{ kN} \cdot 1600 \text{ mm}}{2300 \text{ mm}}$$

$$\underline{F_A = 4,22 \text{ kN}}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow$$

$$F_A + F_B = F_{G1} + F_{G2} + F_{G3}$$

$$F_B = F_{G1} + F_{G2} + F_{G3} - F_A = 17 \text{ kN} + 5 \text{ kN} + 0,8 \text{ kN} - 4,22 \text{ kN}$$

$$\underline{F_B = 18,58 \text{ kN}}$$



$$F_A = 0$$

$$\sum M_{(B)} = 0$$

$$F_{G1} \cdot l_2 - F_{G2} \cdot l_3 - F_{G4} \cdot l_4 = 0$$

$$F_{G4} = \frac{F_{G1} \cdot l_2 - F_{G2} \cdot l_3}{l_4}$$

$$F_{G4} = \frac{17 \text{ kN} \cdot 1000 \text{ mm} - 5 \text{ kN} \cdot 1200 \text{ mm}}{1600 \text{ mm}}$$

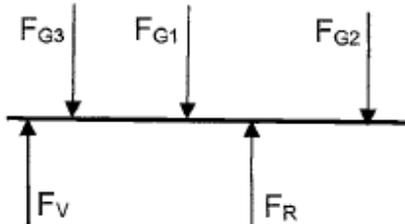
$$F_{G4} = 6,875 \text{ kN}$$

$$F_{G\text{Äpfel}} = F_{G4} - F_{G2} = \underline{6,075 \text{ kN}}$$

$$n_{\text{Äpfel}} = \frac{619,2 \text{ kg}}{0,170 \text{ kg}} = \underline{\underline{3643 \text{ Äpfel}}}$$



Sägeautomat



Achskraft F_R und Stützkraft F_V

$$\sum M_R = 0 = F_{G3} \cdot (l_4 + l_5 - l_2) + F_{G1} \cdot (l_5 - l_2) - F_{G2} \cdot l_2 - F_V \cdot l_1$$

$$\Leftrightarrow F_V = = \frac{1800 \text{ N} \cdot 1620 \text{ mm} + 4500 \text{ N} \cdot 520 \text{ mm} - 1150 \text{ N} \cdot 1880 \text{ mm}}{1750 \text{ mm}} = 1768 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 = F_V + F_R - F_{G1} - F_{G2} - F_{G3}$$

$$\Leftrightarrow F_R = F_{G1} + F_{G2} + F_{G3} - F_V = 4500 \text{ N} + 1150 \text{ N} + 1800 \text{ N} - 1768 \text{ N} = 5682 \text{ N}$$

I3 neu

Kippbedingung: $F_v = 0!$

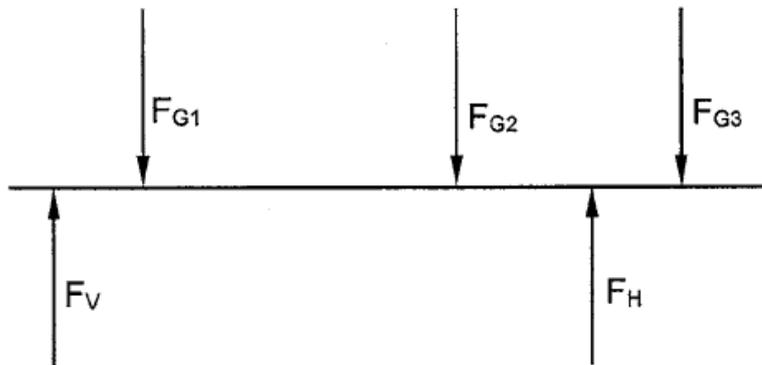
$$\sum M_R = F_{G1} \cdot (l_5 - l_2) - F_{G2} \cdot l_2^*$$

$$\Leftrightarrow l_2^* = \frac{4500 \text{ N} \cdot 520 \text{ mm}}{1150 \text{ N}} = 2034,8 \text{ mm}$$

\Leftrightarrow Schwerpunktverlagerung nach rechts:

$$\Delta l_3 = l_2^* - l_2 = 2034,8 \text{ mm} - 1880 \text{ mm} = 154,8 \text{ mm}$$

$$\Leftrightarrow l_{3,neu} = \Delta l_3 + l_3 = 154,8 \text{ mm} + 1450 \text{ mm} = 1604,8 \text{ mm}$$



Radkräfte $F_{V\text{Rad}}$ und $F_{H\text{Rad}}$

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow$ keine Kräfte in x – Richtung

$$\Sigma F_y = 0 = F_V + F_H - F_{G1} - F_{G2} - F_{G3}$$

$$\Sigma M_V = 0 = F_{G1} \cdot l_1 + F_{G2} \cdot l_2 - F_H \cdot l_3 + F_{G3} \cdot l_4$$

$$F_H = \frac{F_{G1} \cdot l_1 + F_{G2} \cdot l_2 + F_{G3} \cdot l_4}{l_3}$$

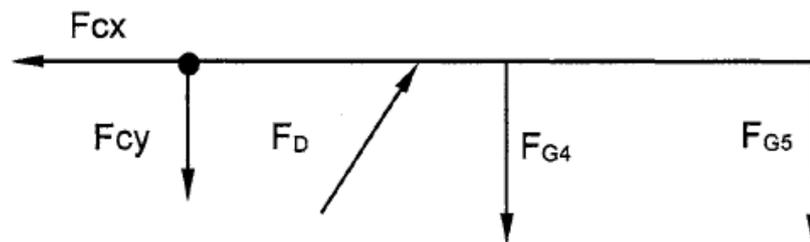
$$F_H = \frac{40 \text{ kN} \cdot 800 \text{ mm} + 70 \text{ kN} \cdot 3800 \text{ mm} + 5 \text{ kN} \cdot 6000 \text{ mm}}{4500 \text{ mm}} = 72,89 \text{ kN}$$

$$F_{RH} = \frac{F_H}{4} = 18,22 \text{ kN}$$

$$F_V = -F_H + F_{G1} + F_{G2} + F_{G3} = -72,89 \text{ kN} + 40 \text{ kN} + 70 \text{ kN} + 5 \text{ kN} = 42,11 \text{ kN}$$

$$F_{RV} = \frac{F_V}{2} = 21,06 \text{ kN}$$

Kräfte F_C und F_D



$$\Sigma M_C = 0 = F_{DY} \cdot l_6 - F_{G4} \cdot \frac{l_5}{2} - F_{G5} \cdot l_5$$

$$F_{DY} = \frac{F_{G4} \cdot \frac{l_5}{2} + F_{G5} \cdot l_5}{l_6} = \frac{2 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m} + 3,5 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m}}{0,45 \text{ m}} = 20 \text{ kN}$$

$$F_D = \frac{F_{DY}}{\sin \alpha} = \frac{20 \text{ kN}}{\sin 35^\circ} = 34,87 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_X = 0 = F_{DX} - F_{CX} \Rightarrow F_{CX} = F_D \cdot \cos 35^\circ = 34,87 \text{ kN} \cdot \cos 35^\circ = 28,56 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_Y = 0 = -F_{CY} + F_{DY} - F_{G4} - F_{G5} \Rightarrow F_{CY} = -F_{G4} - F_{G5} + F_{DY}$$

$$F_{CY} = -2 \text{ kN} - 3,5 \text{ kN} + 20 \text{ kN} = 14,5 \text{ kN}$$

$$F_C = \sqrt{F_{CX}^2 + F_{CY}^2} = \sqrt{(28,56 \text{ kN})^2 + (14,5 \text{ kN})^2} = 32,03 \text{ kN}$$

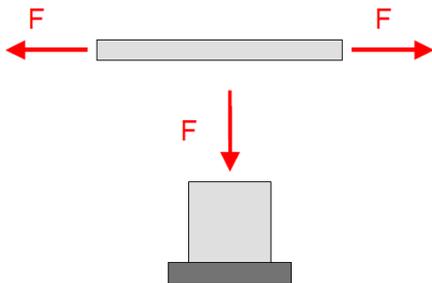
$$\alpha_C = \arctan \frac{F_{CY}}{F_{CX}} = \arctan \frac{14,5 \text{ kN}}{28,56 \text{ kN}} = 26,92^\circ \text{ nach links unten}$$

Festigkeitslehre

Aufgaben der Festigkeitslehre

Anlegung / Dimensionierung
Nachrechnung einer bestehenden Anlage
Schadensbetrachtung

Beanspruchungsarten



Zug

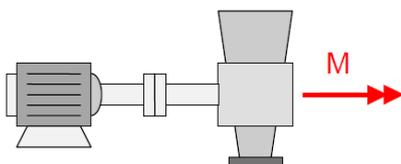
Druck



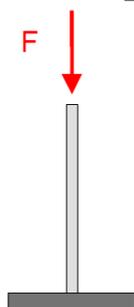
Scherung



Biegung



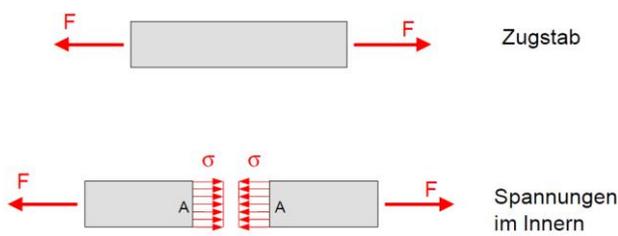
Torsion



Knickung



Zug- und Druckbeanspruchung



$$F_F = D \cdot s$$

Formeln

- Zugspannung

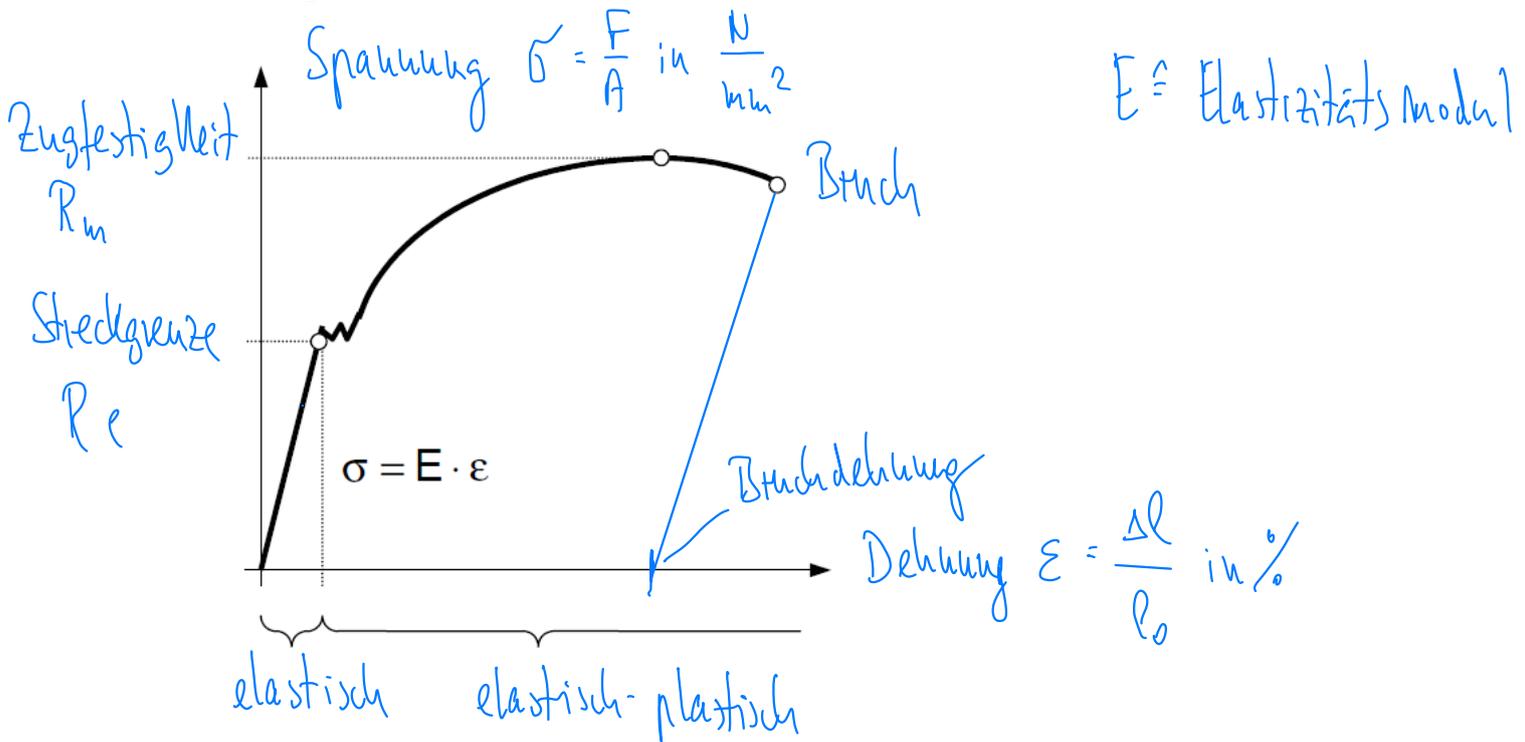
$$\sigma = \frac{F}{A}$$

- Zulässige Spannung und Dimensionierung

elastisch $\Rightarrow \sigma < R_e$: Verformung | plastisch $\Rightarrow \sigma < R_m$: Bruch

- Kennwerte

Beschriften Sie das nachstehende Diagramm eines Zugversuches an einem unlegierten Stahl.





- Zulässige Beanspruchung

Alle Unsicherheiten werden in einem Faktor für die Sicherheit berücksichtigt:

Anwender, Umgebung, Material \Rightarrow Sicherheitszahl \checkmark

Dimensionierung gegen Bruch:

$$\sigma_{zul} = \frac{R_m}{\checkmark}$$

Zul $\hat{=}$ zulässig

Dimensionierung gegen Verformung:

$$\sigma_{zul} = \frac{R_e}{\checkmark}$$

Fragen

- Warum vermindert man in der Konstruktion und Berechnung die zulässigen Spannungen durch Berücksichtigung der Sicherheitszahl?
- Wovon hängt die Höhe der Sicherheitszahl ab?
- Wann wählt man die Streckgrenze und nicht die Zugfestigkeit als obersten zulässigen Wert der Belastung auf ein Bauteil?
- Wie groß ist die Zugspannung in einem Stab der Querschnittsfläche 285mm^2 , der mit 40kN belastet wird?
- Wie groß ist die Sicherheitszahl, wenn die Streckgrenze 310 N/mm^2 beträgt?

$$d) \sigma = \frac{F}{A} = \frac{40000\text{N}}{285\text{mm}^2} = 140 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}; e) \checkmark = \frac{R_e}{\sigma} = 2,2$$

Elastisches Verhalten

Hookesches Gesetz:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad \left| \quad F_F = D \cdot s \quad \rightarrow \quad D = \frac{F_F}{s} \right.$$

Formänderung eines Zugstabes:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0} \quad \rightarrow \quad \Delta l = \frac{F \cdot l_0}{A \cdot E}$$

Übungen

Aufgabe 1

Wie groß muss die Streckgrenze des Werkstoffes sein, wenn in einer Stange eine zulässige Zugspannung von 168 N/mm^2 nicht überschritten werden darf und 1,3-fache Sicherheit gefordert ist?



Aufgabe 2

Ein Drahtseil besteht aus 6 Litzen mit je 19 Drähten von 0,4mm Durchmesser.

Welche Zugspannung tritt bei einer Last von 3000N auf?

Aufgabe 3

- Suchen Sie den Wert für die Streckgrenze von 16 MnCr 5 aus dem Tabellenbuch.
- Berechnen Sie die zulässige Zugspannung bei einer Sicherheitszahl von 2,5.
- Berechnen Sie den notwendigen Querschnitt bei einer Zugkraft von 10 kN.
- Welchem Durchmesser bei Verwendung eines Rundmaterials entspricht dies ?

Aufgabe 4

Eine Schraube hat den Aufdruck M12 x 30 – 10.9.

- Welche Bedeutung hat dieser Aufdruck, welche Angaben kann man diesem entnehmen?
- Wie groß darf bei dieser Schraube die durch das Anziehen erzeugte Normalkraft sein, wenn die Spannung in der Schraube höchstens 70% der Streckgrenze betragen darf?

Aufgabe 5

Eine Schubstange aus Stahlrohr 60 x 3mm wird mit 56kN auf Druck belastet. Die Quetschgrenze beträgt 210 N/mm².

Wie groß ist die Druckspannung und die Sicherheitszahl?

Aufgabe 6

- Auf eine Fläche in der Form eines gleichseitigen Dreiecks mit der Kantenlänge 15 mm wirkt eine Kraft von 25000 N. Berechnen Sie die Druckspannung.
- Wie groß ist die Sicherheitszahl, wenn die Quetschgrenze 440 N/mm² beträgt?



$$1) \sigma_{zul} = \frac{R_e}{\nu} \rightarrow R_e = \sigma_{zul} \cdot \nu = \underline{218,4 \frac{N}{mm^2}}$$

$$2) A_D = \frac{\pi d^2}{4} = 0,126 \text{ mm}^2$$

$$A_{ges} = 19 \cdot b \cdot A_D = \underline{14,25 \text{ mm}^2}$$

$$\sigma = \frac{F}{A_{ges}} = \frac{3000 \text{ N}}{14,25 \text{ mm}^2} = \underline{210,5 \frac{N}{mm^2}}$$

3) 16 Mn Cr 5

C-behalt (:100)

$\Rightarrow 0,16\% \text{ C}$

Mn-behalt (:4)

$\Rightarrow 1,25 \text{ Mn}$

$$a) R_e = 590 \frac{N}{mm^2}$$

$$b) \sigma_{zul} = \frac{R_e}{2,5} = \underline{236 \frac{N}{mm^2}}$$

$$c) \sigma_{zul} = \frac{F}{A} \Rightarrow A = \frac{F}{\sigma_{zul}} = \frac{10000 \text{ N}}{236 \frac{N}{mm^2}} = \underline{42,37 \text{ mm}^2}$$

$$d) \text{⊗ } A = \frac{\pi d^2}{4} \rightarrow d = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}} = \underline{7,34 \text{ mm}}$$



Aufgabe 4

M12-30-10.9

Metrische bewunde, 12mm Außendurchmesser

↳ TAB: Spannungsgrenzwert $\sigma \hat{=} A$

↳ Festigkeitsklasse (TAB)

$$R_m \Rightarrow 1. \text{Zahl} \times 100$$

$$R_e \Rightarrow 1. \text{Zahl} \times 2. \text{Zahl} \times 10$$

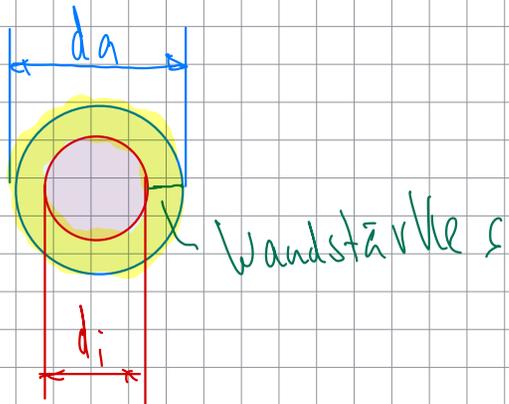
$$R_e = 10.9 \cdot 10 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$
$$= 900 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_{zul} = 0,7 \cdot R_e = 630 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$M12 \Rightarrow A = 84,3 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_{zul} = \frac{F}{A} \Rightarrow F = \sigma_{zul} \cdot A = 630 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 84,3 \text{ mm}^2 = \underline{\underline{53,1 \text{ kN}}}$$

Aufgabe 5



$$d_i = d_a - 2 \cdot s$$

$$d_i = 60 \text{ mm} - 2 \cdot 3 \text{ mm} \\ = 54 \text{ mm}$$

$$A = \frac{\pi d_a^2}{4} - \frac{\pi d_i^2}{4} = \frac{\pi}{4} (d_a^2 - d_i^2) = \underline{537,2 \text{ mm}^2}$$

↳ Ringfläche

$$\sigma_D = \frac{F}{A} = \frac{56000 \text{ N}}{537,2 \text{ mm}^2} = \underline{104,2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}$$

$$R_e = 210 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$v = \frac{R_e}{\sigma_D} \approx 2$$



Aufgabe 6



$$A = \frac{1}{4} \sqrt{3} \cdot l^2 = 97,4 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_D = \frac{F}{A} = 256,6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

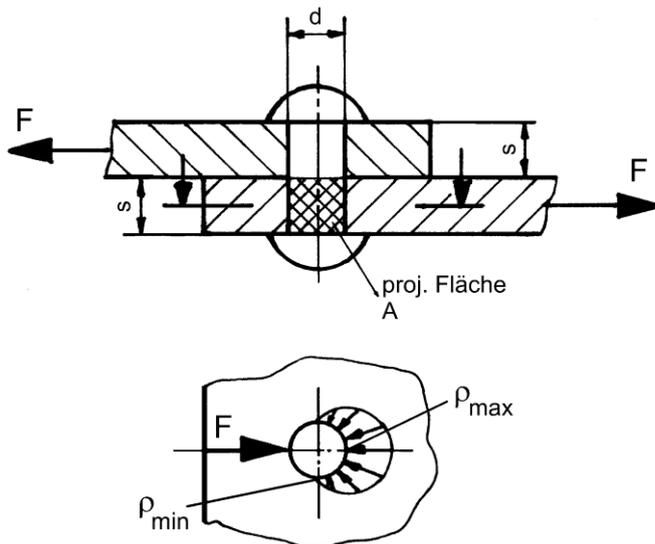
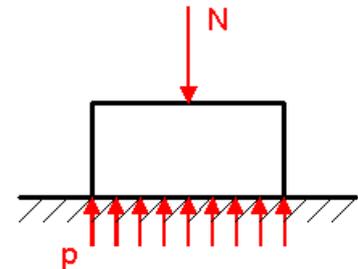
$$Re = 440 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$v = \frac{Re}{\sigma_D} = \underline{\underline{1,7}}$$

Flächenpressung

Flächenpressung tritt zum Beispiel auf:

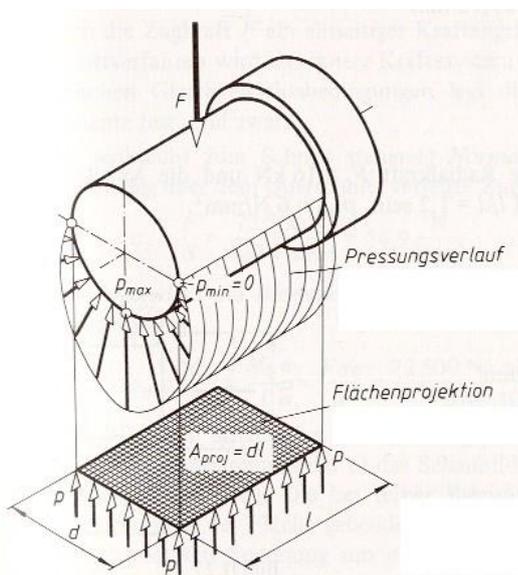
- zwischen dem Kopf einer Schraube und dem zu verschraubenden Teil
- zwischen den Zahnflanken von Zahnrädern
- zwischen Wälzkörper und Laufbahn von Wälzlagern
- zwischen Rad und Schiene bei Eisenbahnen und Kranbahnen



Flächenpressung ist die Kraft pro Kontaktfläche zwischen zwei Festkörpern. Werden zwei Festkörper mit einer Kraft aufeinander gedrückt, so stellt sich in der Berührungsfläche zwischen den Körpern eine Normallastverteilung ein, die als Flächenpressung bezeichnet wird.

$$\text{Flächenpressung} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Berührfläche}}$$

$$p = \frac{F}{A} \quad \text{in} \quad \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$



Die Flächenpressung wird aus der Kraft F , die jeweils übertragen/ausgehalten werden soll, und der Berührfläche berechnet.

Wird die Festigkeit überschritten, so kann das Bauteil örtlich zum Fließen kommen oder sogar ausplatzen.

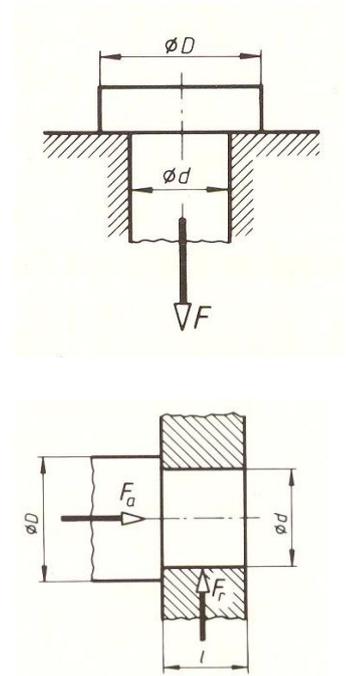
Ist die Berührungsfläche nicht senkrecht zur Krafrichtung oder ist sie gekrümmt (Zylinderfläche), wird die projizierte Fläche eingesetzt.

Die auftretende Flächenpressung bei Bolzen und Nieten, die an die Lochrandung der Teile gedrückt werden, wird als Lochleibungsdruck bezeichnet.

Aufgaben

- 1) Ein Gleitlager mit einer projizierten Fläche von 300 mm^2 wird mit 4500 N belastet. Wie groß ist die Flächenpressung im Lager?
- 2) Ein rechteckiger Schneidstempel $32 \times 20 \text{ mm}$ wird mit einer Kraft von 80 kN belastet. Wie groß ist die Flächenpressung?
- 3) Eine Achse nimmt eine Kraft von 30 kN auf. Der Lagerdurchmesser ist 80 mm und die Lagerlänge 40 mm . Welche Flächenpressung ergibt sich?
- 4) Die Flächenpressung am Kopf eines Schneidstempels von 5 mm Durchmesser darf 200 N/mm^2 nicht überschreiten. Wie groß darf die Schneidkraft höchstens werden?
- 5) Ein Gleitlager mit der Länge l und dem Durchmesser d soll ein Bauverhältnis $l/d = 0,6$ erhalten. Es soll eine Kraft von 20 kN aufnehmen. Die zulässige Flächenpressung für den Werkstoff CuSn12Pb2 beträgt 15 N/mm^2 . Wie groß müssen Länge und Durchmesser des Lagers sein?
- 6) Ein Zugbolzen wird mit 30 kN belastet.
 - a) Bestimmen Sie den erforderlichen Bolzendurchmesser d , wenn die Zugspannung 80 N/mm^2 einzuhalten ist.
 - b) Berechnen Sie den erforderlichen Kopfdurchmesser D , wenn die Flächenpressung zwischen Kopf und Auflage 60 N/mm^2 nicht überschreiten soll.
- 7) Ein Gleitlager wird mit der Radialkraft $F_r = 16 \text{ kN}$ und der Axialkraft $F_a = 7,5 \text{ kN}$ belastet. Das Bauverhältnis l/d soll $1,2$ sein, die zulässige Flächenpressung 6 N/mm^2 .

Bestimmen Sie l , d und D .





Aufgabe 1

$$p = \frac{F}{A} = \frac{45000 \text{ N}}{300 \text{ mm}^2} = \underline{150 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}$$

Aufgabe 2

$$p = \frac{F}{A} \quad \text{mit } A = 32 \text{ mm} \cdot 20 \text{ mm} = 640 \text{ mm}^2$$
$$= \frac{80000 \text{ N}}{640 \text{ mm}^2} = \underline{125 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}$$

Aufgabe 3

$$p = \frac{F}{A} \quad \text{mit } A = d \cdot l = 80 \text{ mm} \cdot 40 \text{ mm} = 3200 \text{ mm}^2$$
$$= \frac{30000 \text{ N}}{3200 \text{ mm}^2} = \underline{9,4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}$$

Aufgabe 4

$$p = \frac{F}{A} \Rightarrow F = p \cdot A \quad \text{mit } A = \frac{\pi d^2}{4} = \underline{19,63 \text{ mm}^2} \Rightarrow \underline{F = 3926 \text{ N}}$$



Aufgabe 5

$$p = \frac{F}{A} \Rightarrow A = \frac{F}{p} = \frac{20\,000\text{ N}}{15 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} = \underline{1333,3 \text{ mm}^2}$$

$$A = l \cdot d \quad \text{mit} \quad \frac{l}{d} = 0,6 \Rightarrow l = 0,6 \cdot d$$

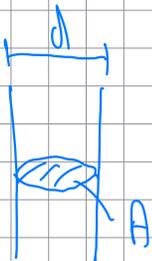
$$= 0,6 \cdot d^2$$

$$1333,3 \text{ mm}^2 = 0,6 \cdot d^2 \rightarrow \underline{d = 47,14 \text{ mm}}$$

$$l = \underline{28,28 \text{ mm}}$$

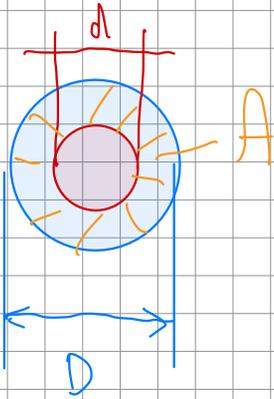
Aufgabe 6

$$a) \quad \sigma_{\text{Zul}} = \frac{F}{A} \rightarrow A = \frac{F}{\sigma_{\text{Zul}}} = \frac{30\,000\text{ N}}{80 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} = \underline{375 \text{ mm}^2}$$



$$A = \frac{\pi d^2}{4} \rightarrow \underline{d = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}} = 21,85 \text{ mm}}$$

$$b) \quad p = \frac{F}{A} \Rightarrow A = \frac{F}{p} = \frac{30000 \text{ N}}{60 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} = \underline{500 \text{ mm}^2}$$



$$A = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4}$$

$$A + \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$D = \sqrt{\frac{4A}{\pi} + d^2} = \underline{33,38 \text{ mm}}$$

Aufgabe 7

Radial, $p = \frac{F_R}{A_R}$ mit $A_R = d \cdot l$

$$\Rightarrow A_R = \frac{F_R}{p} = \frac{16000 \text{ N}}{6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} = 2666,6 \text{ mm}^2$$

$$A_R = d \cdot l = 1,2 d^2 = 2666,6 \text{ mm}^2$$



$$\Rightarrow \underline{d = 47,14 \text{ mm}} \quad ; \quad \underline{l = 1,2 \cdot d = 56,57 \text{ mm}}$$

Axial, $\sigma = \frac{F_A}{A_A} \Rightarrow A_A = \frac{F_A}{\sigma} = \frac{7500 \text{ N}}{6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}$

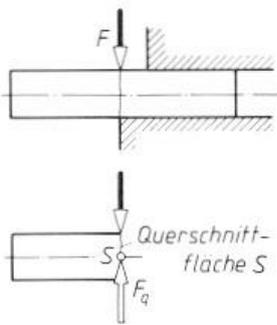
$$A_A = 1250 \text{ mm}^2 \quad ; \quad A_A = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4}$$

$$\Rightarrow \underline{D = \sqrt{\frac{4 \cdot A_A}{\pi} + d^2}} = \underline{61,76 \text{ mm}}$$

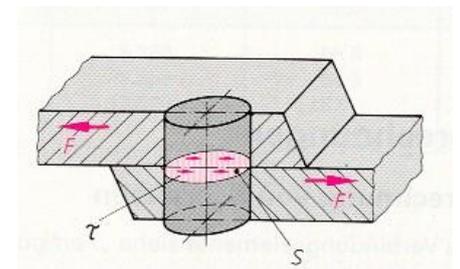
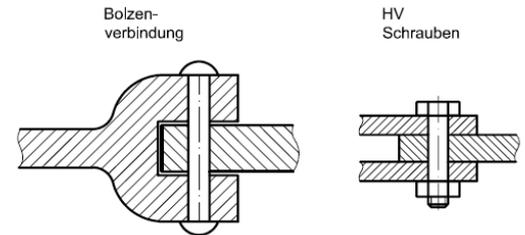
Scherbeanspruchung

Verbindungen, welche große Querkräfte aufnehmen, werden auf Scherung belastet. Zylinder Stifte, Nieten und Schrauben jeglicher Art sind Elemente, die oft solche Kräfte aufnehmen müssen.

Eine Belastung F wirkt abscherend auf einen Stab, wenn sie senkrecht zur Achse wirkt und kein Moment in Bezug auf den Querschnitt hat, das heißt wenn die Kraft-Wirklinie im Querschnitt liegt.



Die innere Querkraft (im abgeschnittenen Teil) wirkt in der Schnittfläche, es treten also Scherspannungen auf. Im Gegensatz zu den Druck – und Zugspannungen, die als Normalspannungen senkrecht zum beanspruchten Querschnitt stehen, wirken Scherspannungen also im beanspruchten Querschnitt.



Die Scherkraft verteilt sich gleichmäßig entlang (nicht senkrecht sondern parallel) der Querschnittsfläche!

Abscher-Hauptgleichung

Abscherspannung $\tau_a = \text{Scherkraft} / \text{beanspruchter Querschnitt}$

$$\tau = \frac{F}{S}$$

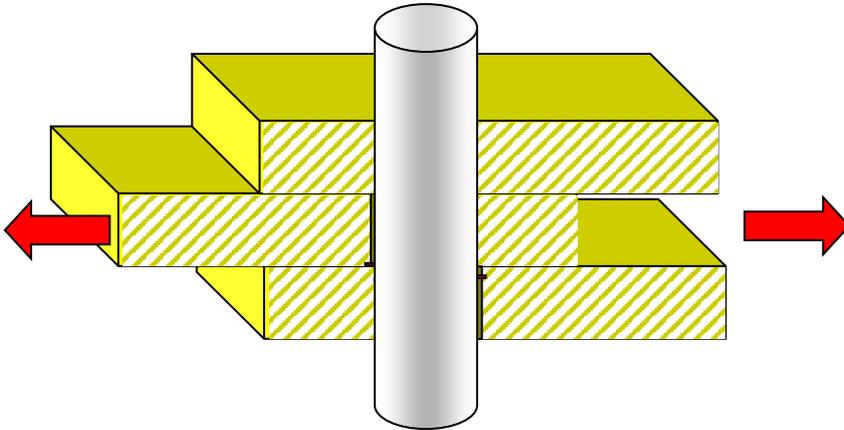
Die Abscherfestigkeit τ_{aB} von Stahl kann aus der Streckgrenze R_e bestimmt werden:

$$\text{Für Stahl ist } \tau_{aB} = 0,6 \cdot R_e$$

Aufgaben

- 1) Eine Lasche ist mit einem Bolzen (21mm Durchmesser) an einem Träger befestigt. Wie groß ist die Scherspannung bei einer Kraft von 21kN?
- 2) Wie groß ist die zulässige Scherspannung, wenn die Streckgrenze des Materials 330 N/mm² beträgt und die Sicherheitszahl 1,5 sein soll?
- 3) Im Scherversuch wurde eine Probe aus Baustahl (6mm Durchmesser) bei 9,8 kN abgeschert. Wie groß ist die Scherfestigkeit?

Mehrschnittige Verbindungen



Die Anzahl der Verbindungen (Verteilung der angreifenden Kraft auf mehrere Querschnitte) berücksichtigt man durch deren Anzahl n der beanspruchten Schnitte.

Aufgaben

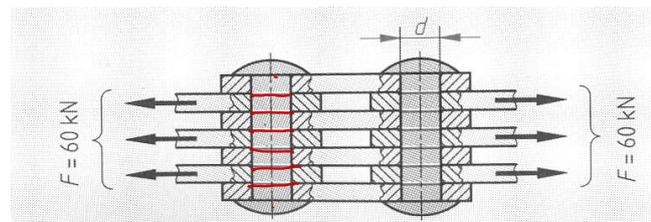
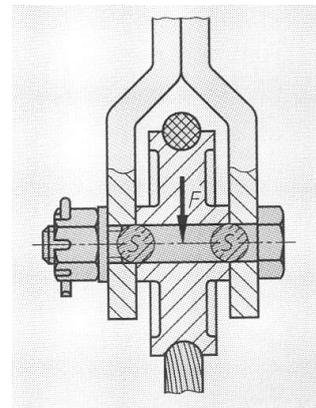
4) Der Tragbolzen der Seilrolle hat einen Durchmesser von 20mm. Wie groß ist die Scherspannung, wenn eine Belastung von 25kN auftritt?

b) Mit welcher Kraft kann der Gelenkbolzen aus S275JR beansprucht werden, wenn 2fache Sicherheit verlangt wird?

5) Die Laschenkette wird mit 60kN belastet. Wie groß muss der Durchmesser der Gelenkbolzen sein, wenn die Streckgrenze 60 N/mm² beträgt?

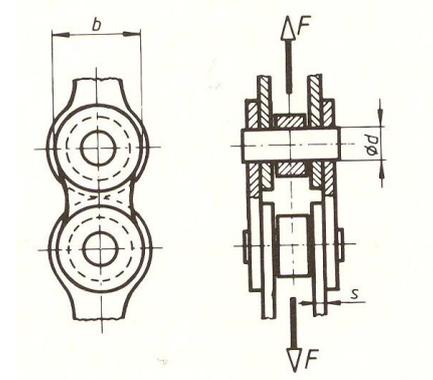
6) Eine Passschraube DIN 609 – M20 x 80 – 8.8 wird mit 130 kN auf Scherung belastet.

- Bestimmen Sie aus den Angaben die Streckgrenze und die Zugfestigkeit.
- Entnehmen Sie dem Tabellenbuch den belasteten Querschnitt der Schraube.
- Wie groß ist die Sicherheit gegen Abscheren?



7) Die skizzierte Kette wird mit 7kN auf Zug beansprucht. Die Abmessungen betragen $d = 4\text{mm}$, $b = 10\text{mm}$, $s = 1,5\text{mm}$.

- Berechnen Sie die Zugspannung im gefährdeten Laschenquerschnitt.
- Bestimmen Sie die Abscherspannung in den Bolzen.
- Ermitteln Sie den Lochleibungsdruck (Flächenpressung) zwischen Bolzen und Lasche.





Aufgabe 1

$$\tau = \frac{F}{A} \quad \text{mit } A = \frac{\pi d^2}{4} = 346,4 \text{ mm}^2$$

$$= 60,6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Aufgabe 2

$$\tau_{\text{ab}} = 0,6 \cdot R_e = 198 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{\text{ab, zul}} = \frac{198 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{1,5} = 132 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Aufgabe 3

$$\tau_{\text{ab}} = \frac{F}{A} \quad \text{mit } A = \frac{\pi d^2}{4} = 28,3 \text{ mm}^2$$

$$\tau_{\text{ab}} = 346,6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$



Aufgabe 4

$$a) \quad \tau = \frac{F}{2 \cdot A} \quad \text{mit} \quad A = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$= \frac{25000 \text{ N}}{2 \cdot \frac{\pi (20 \text{ mm})^2}{4}} = \underline{39,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}$$

$$b) \quad S275 \text{ JR} \rightarrow R_e = 265 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{ab} = 0,6 \cdot R_e = 159 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{zul} = \frac{\tau_{ab}}{\sqrt{}} = 79,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{zul} = \frac{F}{2A} \Rightarrow F = 2 \cdot A \cdot \tau_{zul} = \underline{49,9 \text{ kN}}$$

Aufgabe 5

$$\tau_{ab} = 0,6 \cdot R_e = 36 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{ab} = \frac{F}{6A} = \frac{60000 \text{ N}}{6 \cdot A} \rightarrow A = 277,8 \text{ mm}^2$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \rightarrow d = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}} = \underline{18,8 \text{ mm}}$$



Aufgabe b

$$a) \quad 8.8 \quad \rightarrow \quad R_m = 8 \cdot 100 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 800 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$R_e = 8.8 \cdot 10 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 640 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

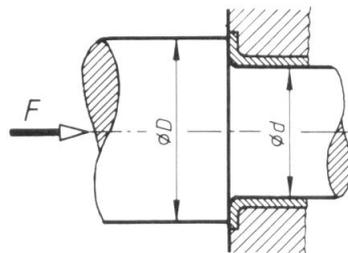
$$b) \quad S = 245 \text{ mm}^2$$

$$c) \quad \bar{\sigma} = \frac{F}{A} = \frac{130\,000 \text{ N}}{245 \text{ mm}^2} = \underline{\underline{530,6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}}$$

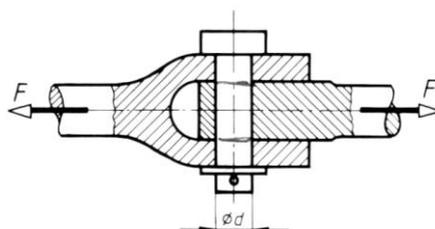
$$\bar{\sigma}_{ab} = 0,6 \cdot R_e = 384 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Hausaufgabe

- 1) Eine Zuglasche auf Flachstahl 60 x 6 wird durch 12 kN belastet. Wie groß ist die Zugspannung?
- 2) Wie groß ist die höchste Zugbelastung, die eine Schraube M16 aufnehmen kann, wenn die zulässige Spannung 90 N/mm² nicht überschreiten darf?
- 3) Ein Drahtseil soll 90 kN Last tragen. Wie viele Drähte von 1,6 mm Durchmesser muss das Seil haben, wenn 200 N/mm² Spannung zulässig sind?
- 4) 160 kN wirken auf einen quadratischen Querschnitt, dessen zulässige Flächenpressung 4 N/mm² beträgt. Bestimmen Sie die Kantenlänge.
- 5) Die skizzierte Welle mit dem Zapfendurchmesser $d = 80\text{mm}$ wird durch eine Axialkraft 5 kN belastet. Sie soll vom Bund bei einer Flächenpressung von 2,5 N/mm² aufgenommen werden. Berechnen Sie den Bunddurchmesser D .



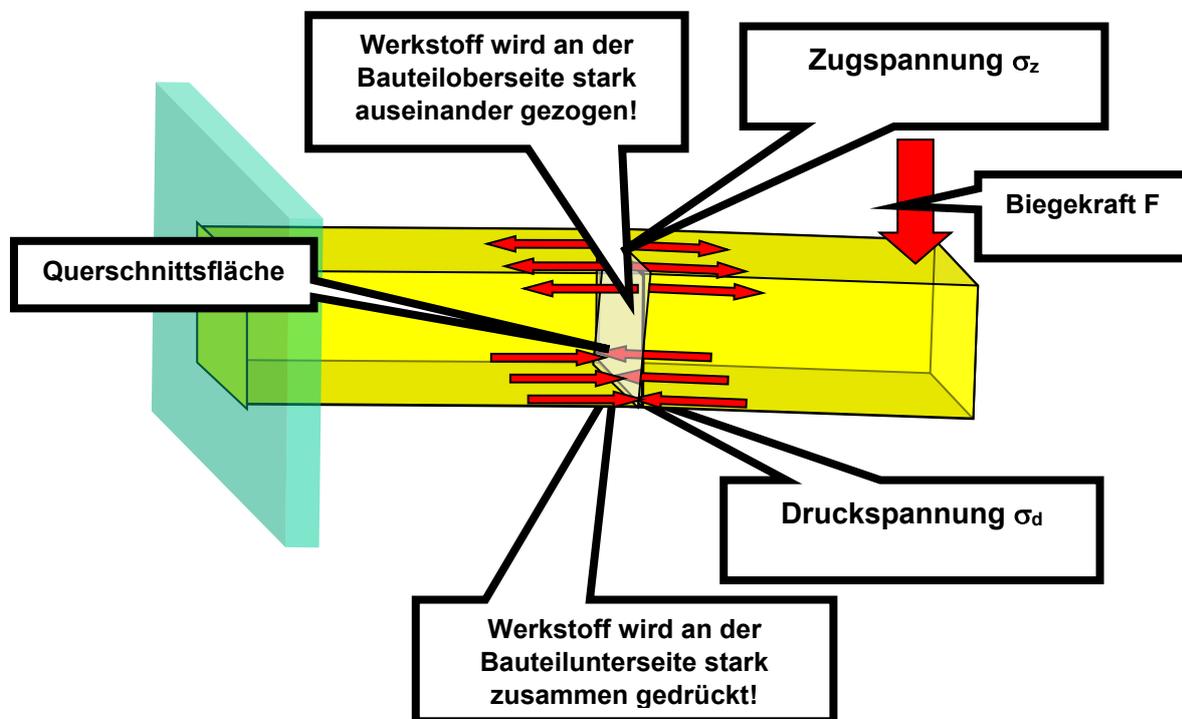
- 6) Das skizzierte Stangengelenk wird mit 1,9 kN belastet. Bestimmen Sie den Bolzendurchmesser für eine zulässige Abscherspannung von 60 N/mm².



Biege-Beanspruchung

Greift eine Kraft an dem freien Ende eines Stabes, dessen anderes Ende eingespannt ist, quer zur Längsachse an, und weicht der Kraftangriffspunkt in Richtung der Kraft aus, so erfährt der Körper eine Biegung. Dabei wirken in dem Körper sowohl Zug- als auch Druckkräfte, die sich gegenseitig aufheben. Zug- und Druckbereich sind durch die neutrale Faser voneinander getrennt. Die maximale Zugspannung tritt an der Kraftangriffsseite, die maximale Druckspannung an der gegenüberliegenden Seite auf.

→ Der Werkstoff muss in seinem Inneren die Biegespannung σ_b (Zug und Druck) aufnehmen!



Vorgehensweise bei Auslegung

Zur Berechnung der Abmessungen auf Biegung beanspruchter Bauteile ist es zunächst wichtig, die äußere Beanspruchung zu klären (Aufgabe der Statik). Danach ist der Einfluss der Querschnittsform zu untersuchen.

Ein biegebeanspruchter Träger wird in jedem Schnitt, der senkrecht zur neutralen Faser liegt (Biegeachse), von einem äußeren Moment – dem Biegemoment – und einer senkrecht zur Biegeachse stehenden Kraft – der Querkraft – beansprucht.

Es muss die Summe der inneren Kräfte und Momente in einem beliebigen Schnitt gleich der Summe der äußeren Kräfte und Momente sein (Gleichgewichtsbedingung der Statik).



Biegespannung σ_b

Diese Größen beeinflussen die Biegespannung:

- Größe der Kraft
 - Wirksame Hebellänge
 - Art der Einspannung des Trägers
 - Form des Trägerquerschnittes
 - Abmessung des Trägerquerschnittes
 - Lage des Trägerquerschnittes zur Biegeachse
- } Biegemoment M_b
- } Widerstandsmoment W

Biegemoment M_b

Biegemomente werden aufgrund der wirkenden Kraft in Zusammenhang mit der wirksamen Hebellänge sowie der Art der Einspannung berechnet. Die Formeln für die verschiedenen Belastungsfälle können aus Tabellen entnommen werden.

→ Bezug Tabellenbuch: S. 45

Axiales Widerstandsmoment W

Das axiale Widerstandsmoment gibt an, welchen Widerstand eine Form der Kraft entgegenzuwirken vermag. Es setzt sich aus dem Trägheits- bzw. Flächenmoment 2. Grades (I) dividiert durch den Randfaserabstand zusammen.

So weist beispielsweise Flachstahl, hochkant beansprucht, ein größeres Widerstandsmoment auf, als wenn er flach beansprucht wird.

Das Widerstandsmoment für symmetrische Querschnitte (Stahlträger und dergleichen) ist meist in tabellarischer Form bei den Stahllieferanten vorhanden.

Achtung: Das Widerstandsmoment hat nur mit der Form des Trägers und der Richtung der angreifenden Kraft zu tun (Lage der Biegeachse)!

→ Bezug Tabellenbuch: S. 46 / S. 153 ff.

Aufgaben

- 1) Ein Rundstahl mit 54mm Durchmesser und ein I-Profil DIN 1025-~~1~~²-160 sollen auf Biegung beansprucht werden.
Wie groß sind die Querschnittsflächen und die Widerstandsmomente für die Biegeachse x-x?



2) Berechnen Sie die axialen Widerstandsmomente W in cm^3 für

- Eine Welle mit 22mm Durchmesser
- Einen Quadratstahl mit der Seitenlänge 40mm
- Einen Flachstahl mit $h = 28\text{mm}$, $b = 12\text{mm}$

Berechnung der Biegespannung (Biegegleichung)

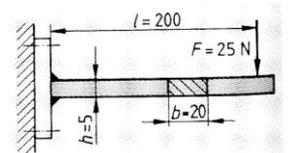
Die Biegegleichung beschreibt den Zusammenhang zwischen den Normalspannungen beim Biegen, der äußeren Belastung durch das Biegemoment und der Querschnittsform.

$$\text{Biegespannung} = \frac{\text{Biegemoment } t}{\text{axiales Widerstandsmoment}}$$

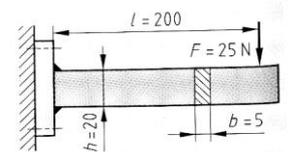
$$\sigma_b = \frac{M_b}{W}$$

Aufgaben

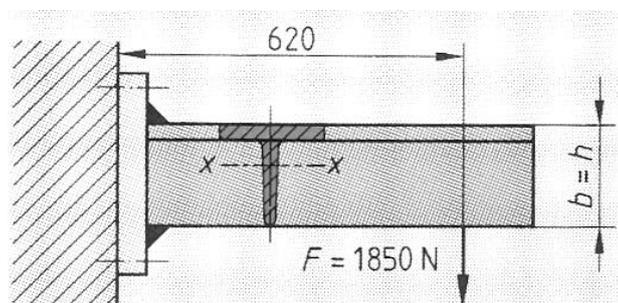
- 3) Wie groß ist die Biegespannung in einem einseitig eingespannten Flachstahl 20 x 5mm, der im Abstand von 200mm von einer Kraft $F = 25\text{N}$ belastet wird?



- 4) Wie groß ist die Biegespannung in dem einseitig eingespannten Flachstahl 20 x 5mm, wenn er hochkant belastet wird?



- 5) Eine Welle muss ein Biegemoment von 527 Nm aufnehmen, die Biegespannung darf hierbei maximal 68 N/mm^2 betragen. Bestimmen Sie das axiale Widerstandsmoment und den Durchmesser der Welle.
- 6) Ein T-Profil DIN EN 10055 wird mit einer Kraft von 1850N beansprucht. Welche Größe muss der Träger besitzen, wenn die zulässige Biegespannung 68 N/mm^2 beträgt?

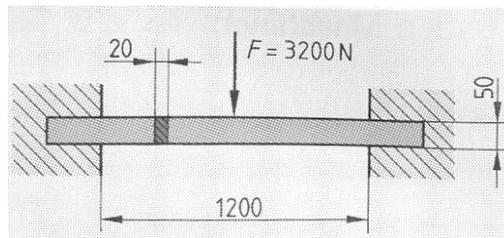
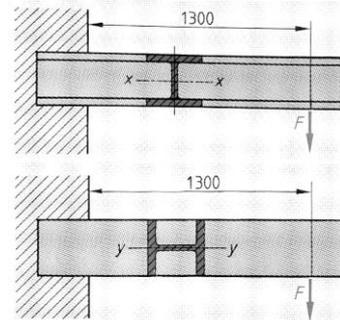


- 7) Ein Träger DIN 1025- IPB 280 ist einseitig eingespannt. Die zulässige Biegespannung beträgt 82 N/mm^2 . Wie groß darf die belastende Kraft werden, wenn der Träger

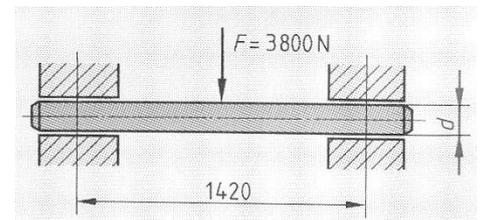
- Um die x-x-Achse beansprucht wird?
- Um die y-y-Achse beansprucht wird?

- 8) Ein Flachstahl mit der Höhe 50 mm und der Breite 20 mm ist doppelseitig eingespannt und wird in der Mitte durch 3200 N belastet. Der Abstand zu den Einspannstellen beträgt 1200 mm .

- Wie groß ist das Biegemoment?
- Wie groß ist die Biegespannung?

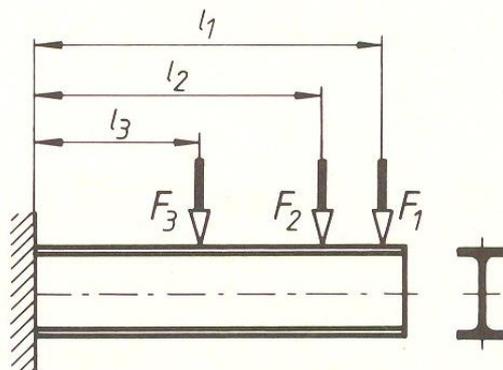


- 9) Wie groß muss der Durchmesser der Achse sein, wenn die zulässige Biegespannung 76 N/mm^2 beträgt und die Kraft von 3800 N in der Mitte angreift? Die Achse ist als frei aufliegender Träger auf zwei Stützen zu betrachten.



- 10) Ein Freitragender mit I-Profil soll die Lasten $F_1 = 15 \text{ kN}$, $F_2 = 9 \text{ kN}$, $F_3 = 20 \text{ kN}$ aufnehmen. Die Abstände betragen $l_1 = 2 \text{ m}$, $l_2 = 1,5 \text{ m}$, $l_3 = 0,8 \text{ m}$.

- Bestimmen Sie das maximale Biegemoment.
- Berechnen Sie das erforderliche Widerstandsmoment für eine zulässige Spannung von 120 N/mm^2 .
- Suchen Sie erforderliche IPE-Profil und dessen Widerstandsmoment.
- Ermitteln Sie die im Freitragender auftretende Höchstspannung.



Allgemeine Vorgehensweise

Für beliebige Fälle wird die Berechnung und Darstellung der Biegemomente sowie des Querkraftverlaufs wie folgt ermittelt:

- Freimachen des Trägers
- Berechnung der Auflagerkräfte
- Der gefährdete Querschnitt eines Trägers liegt an der Stelle des größten Biegemoments, das mit der Stelle des Vorzeichenwechsels der Querkraft zusammen fällt

$$F \cdot x$$
$$M(x); \quad M'(x) = 0$$

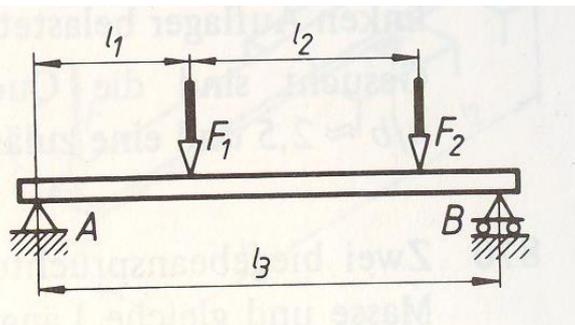
Merkregeln

- An freien unbelasteten Enden sind die Querkraft F_Q und das Biegemoment gleich Null
- Zwischen zwei Einzelkräften ist die Querkraft konstant und das Biegemoment linear
- Am Angriffspunkt einer Kraft hat die Querkraft einen Sprung und das Biegemoment einen Knick
- Am Nulldurchgang der Querkraft erreicht das Biegemoment seinen Extremwert

Aufgaben

11) Ein Stützträger wird durch die Einzellasten $F_1 = 10 \text{ kN}$ und $F_2 = 30 \text{ kN}$ belastet. Die Abstände betragen $l_1 = 2 \text{ m}$, $l_2 = 3 \text{ m}$, $l_3 = 6 \text{ m}$.

- Fertigen Sie einen Freischnitt. \overline{EF}
- Berechnen Sie die Stützkräfte F_A und F_B .
- Zeichnen Sie den Querkraftverlauf. Bestimmen Sie hieraus die Stelle des maximalen Biegemomentes.





$$1) \quad A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (5,4 \text{ cm})^2}{4} = \underline{22,9 \text{ cm}^2}$$

$$W = \frac{\pi d^3}{32} = \underline{15,46 \text{ cm}^3}$$

I-Profil : $S = \underline{54,3 \text{ cm}^2}$

$$W_x = \underline{311 \text{ cm}^3}$$

$$2) \quad a) \quad W = \frac{\pi d^3}{32} = \underline{1,05 \text{ cm}^3}$$

$$b) \quad W = \frac{h^3}{6} = \underline{10666,7 \text{ mm}^3}$$

$$c) \quad W_x = \frac{bh^2}{6} = \underline{1568 \text{ mm}^3}$$



$$3) M_b = F \cdot l = 5 \text{ Nm} = 5000 \text{ Nmm}$$

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{(20 \text{ mm}) \cdot (5 \text{ mm})^2}{6} = 83,3 \text{ mm}^3$$

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W} = 60 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$4) W = \frac{bh^2}{6} = \frac{(5 \text{ mm}) \cdot (20 \text{ mm})^2}{6} = 333,3 \text{ mm}^3$$

$$\sigma_B = 15 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$5) \sigma_B = \frac{M_b}{W} \rightarrow W = \frac{M_b}{\sigma_B} = \frac{527 \text{ Nm}}{68 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} = 7750 \text{ mm}^3$$

$$W = \frac{\pi d^3}{32} \rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W}{\pi}} = 42,9 \text{ mm}$$

$$6) \sigma_B = \frac{M_b}{W} \rightarrow W = \frac{M_b}{\sigma_B} = \frac{1850 \text{ Nm} \cdot 620 \text{ mm}}{68 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} = 16867,6 \text{ mm}^3$$

$$\Rightarrow \text{gewählt: } T 100 (W_x = 24,6 \text{ cm}^3) = 16,8676 \text{ cm}^3$$



$$7) \quad \sigma_B = \frac{M_b}{W} = \frac{F \cdot l}{W} \rightarrow F = \frac{\sigma_B \cdot W}{l}$$

$$a) \quad W_x = 1380 \text{ cm}^3 = 1380 \text{ 000 mm}^3$$

$$\rightarrow \underline{F = 87 \text{ kN}}$$

$$b) \quad W_y = 471 \text{ cm}^3 = 471 \text{ 000 mm}^3$$

$$\rightarrow \underline{F = 29,7 \text{ kN}}$$

$$8) a) \quad M_b = \frac{F \cdot l}{8} = \frac{3200 \text{ N} \cdot 1200 \text{ mm}}{8} = 480 \text{ Nm}$$

$$b) \quad \sigma_b = \frac{M_b}{W} \quad \text{mit } W_x = \frac{bh^2}{6} = 833,3 \text{ mm}^3$$

$$\underline{\sigma_b = 57,6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}$$

$$9) \quad M_b = \frac{F \cdot l}{4} = \underline{1349 \text{ 000 Nm}}$$



$$\sigma_b = \frac{M_b}{W} \rightarrow W = \frac{M_b}{\sigma_b} = \underline{\underline{17750 \text{ mm}^3}}$$

$$W = \frac{\pi d^3}{32} \rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W}{\pi}} = \underline{\underline{56,5 \text{ mm}}}$$

10) a) $M_{b,\max} = F_1 \cdot l_1 + F_2 \cdot l_2 + F_3 \cdot l_3 = \underline{\underline{59,5 \text{ kN}\cdot\text{m}}}$

b) $\sigma_b = \frac{M_b}{W} \rightarrow W = \frac{M_b}{\sigma_b} = 495\,833,3 \text{ mm}^3$
 $= \underline{\underline{495,83 \text{ cm}^3}}$

c) IPE 360 mit $W_x = 557 \text{ cm}^3$

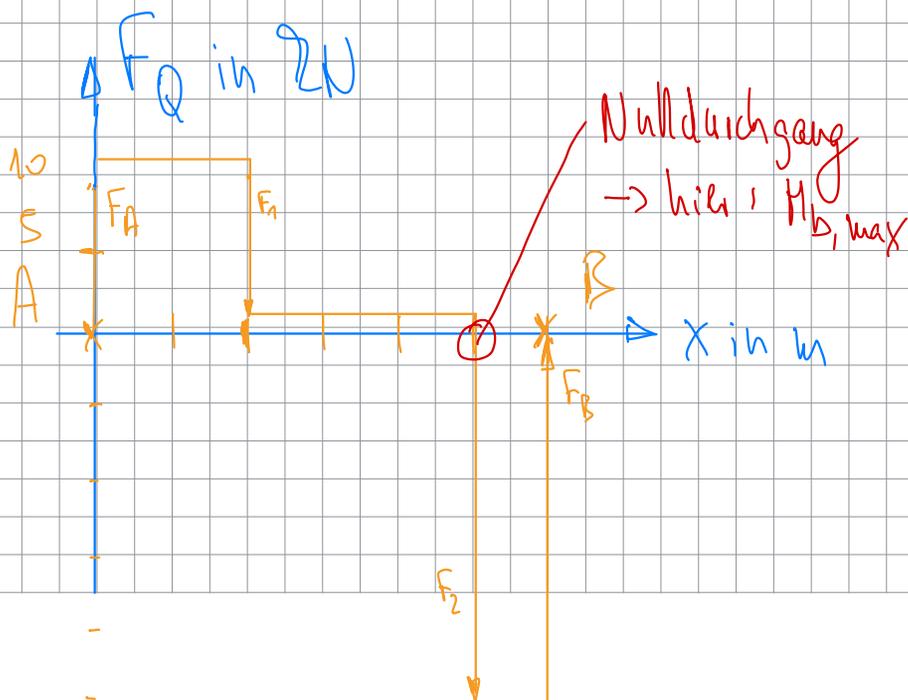


$$b) \sum F_y = F_A - F_1 - F_2 + F_B = 0$$

$$\sum M_A = -F_1 \cdot l_1 - F_2 \cdot (l_1 + l_2) + F_B \cdot l_3 = 0$$

$$\rightarrow F_B = \frac{F_1 \cdot l_1 + F_2 \cdot (l_1 + l_2)}{l_3} = \underline{28,3 \text{ kN}}$$

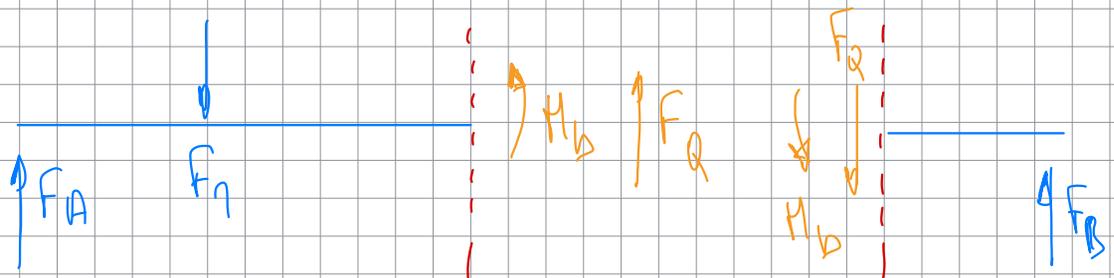
$$\rightarrow F_A = \underline{11,6 \text{ kN}}$$





Stelle des maximalen Biegemoments :
Kraftangriffspunkt von F_2

⇒ Wert von $M_{b, \max}$ bestimmen

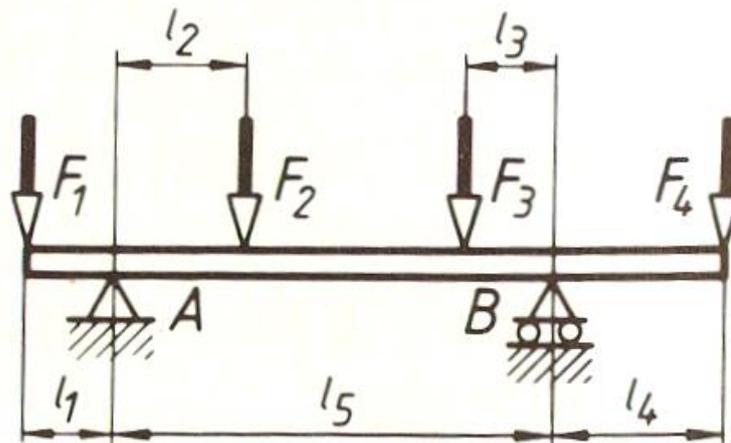


$$M_{b, \max} = F_2 \cdot (l_3 - l_1 - l_2)$$
$$= \underline{\underline{28,3 \text{ Nm}}}$$

$$\Rightarrow \sigma_b = \frac{M_{b, \max}}{W}$$

Aufgabe

Für den skizzierten zweiseitigen Kragträger betragen die Einzellasten $F_1 = 10 \text{ kN}$, $F_2 = 15 \text{ kN}$, $F_3 = 15 \text{ kN}$, $F_4 = 10 \text{ kN}$ und die Abstände $l_1 = 1 \text{ m}$, $l_2 = 1,5 \text{ m}$, $l_3 = 1 \text{ m}$, $l_4 = 2 \text{ m}$, $l_5 = 5 \text{ m}$.



- Ermitteln Sie rechnerisch die Stützkräfte F_A und F_B .
- Zeichnen Sie den Querkraftverlauf. Bestimmen Sie hieraus die Stelle des maximalen Biegemomentes.
- Berechnen Sie das maximale Biegemoment.



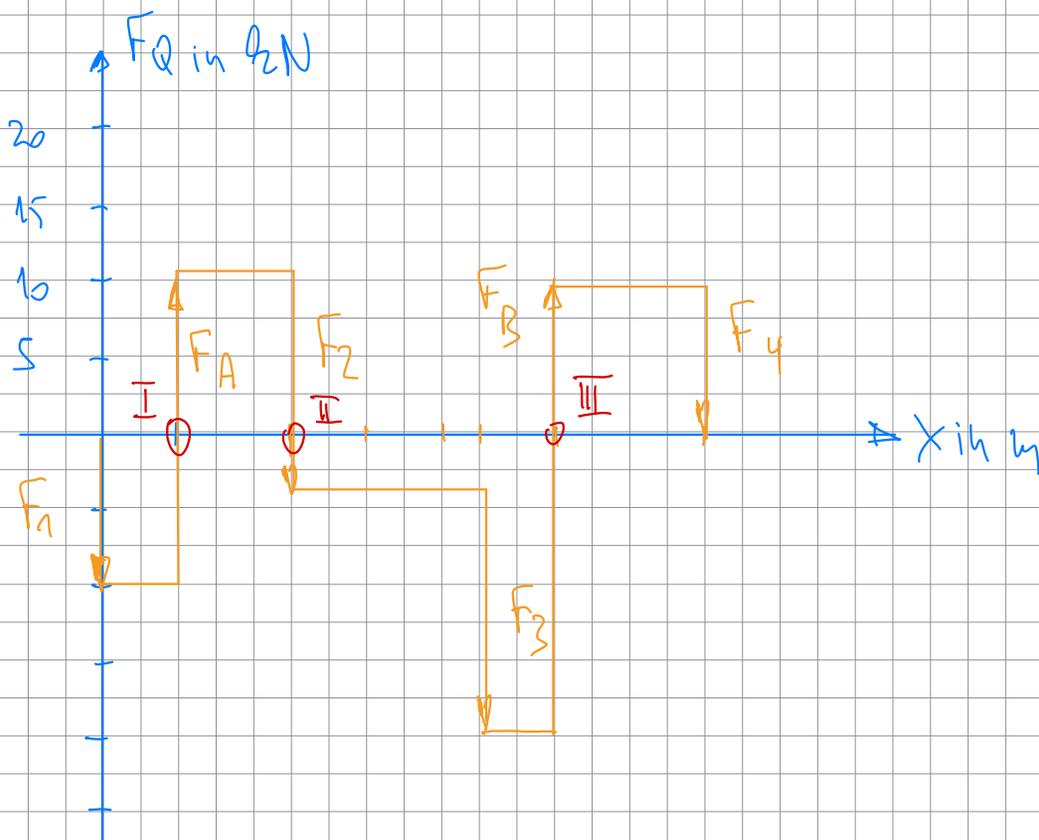
$$a) \sum F_y = -F_1 + F_A - F_2 - F_3 + F_B - F_4 = 0$$

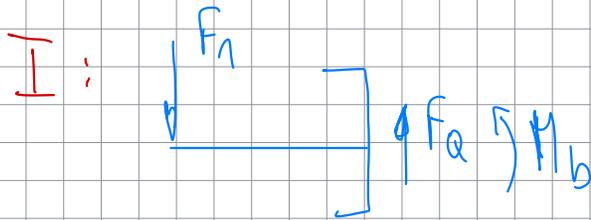
$$\sum M_A = F_1 \cdot l_1 - F_2 \cdot l_2 - F_3 \cdot (l_5 - l_3) + F_B \cdot l_5 - F_4 \cdot (l_5 + l_4) = 0$$

$$\rightarrow F_B = \frac{-F_1 \cdot l_1 + F_2 \cdot l_2 + F_3 \cdot (l_5 - l_3) + F_4 \cdot (l_5 + l_4)}{l_5}$$

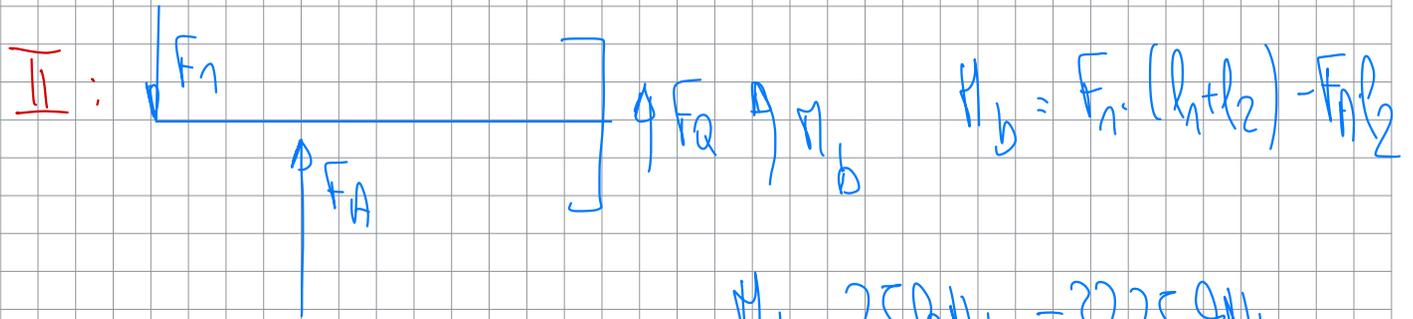
$$= \underline{28,5 \text{ kN}}$$

$$\rightarrow F_A = \underline{21,5 \text{ kN}}$$





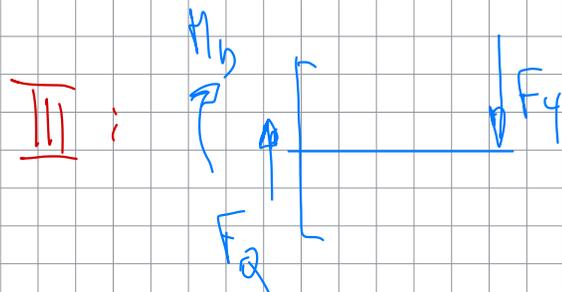
$$M_b = F_1 \cdot l_1 = \underline{10 \text{ kNm}}$$



$$M_b = F_1 \cdot (l_1 + l_2) - F_A \cdot l_2$$

$$M_b = 25 \text{ kNm} - 32,25 \text{ kNm}$$

$$= \underline{-7,25 \text{ kNm}}$$



$$M_b = F_4 \cdot l_4 = \underline{20 \text{ kNm}}$$

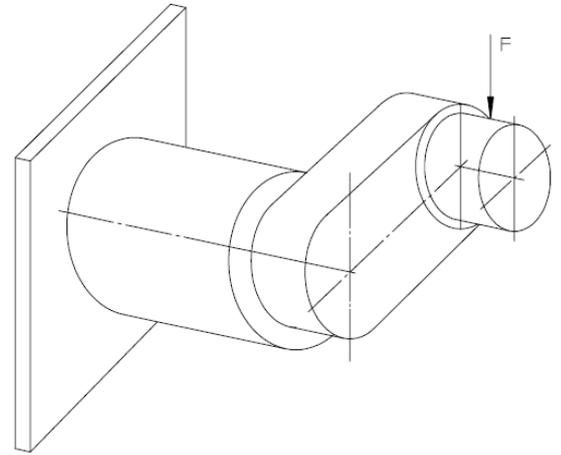
$$\Rightarrow M_{b, \text{min}} = M_{b, \text{max}}$$

Belastung auf Torsion (Verdrehung)

In einem Körper, der auf Verdrehung beansprucht wird, entstehen als Reaktion auf die äußere Beanspruchung Schubspannungen.

→ Torsion ist eine Beanspruchung, die durch ein Drehmoment ausgelöst wird. Dabei wirkt eine Kraft in Umfangsrichtung eines Körpers und verdreht ihn um seine Längsachse.

→ Ein äußeres Drehmoment verursacht ein inneres Torsionsmoment.

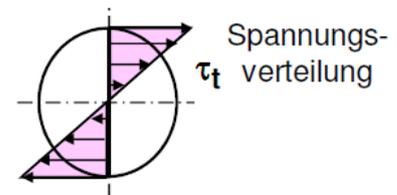
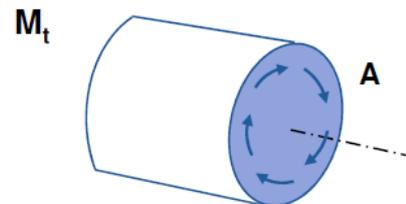


Bei Torsion existiert ein zweiachsiger Spannungszustand:

Im Querschnitt quer zur Längsachse wirken tangential gerichtete Torsionsspannungen als Schubspannungen.

Diese Schubspannungen sind in der äußeren Randfaser des Querschnittes am größten, sie nehmen zur Mitte des Querschnittes hin proportional ab.

Die neutrale Faser in der Querschnittsmitte ist spannungsfrei.



Torsionshauptgleichung

Torsionsspannung τ_t = Torsionsmoment M_T / polares Widerstandsmoment W_p

Die größte auftretende Torsionsspannung, die in der Randzone auftritt, darf die zulässige Spannung $\tau_{t\text{zul}}$ nicht überschreiten.

$$\tau_t = \frac{M_T}{W_p}$$

Äußere Beanspruchung

Wellen werden durch Drehmomente auf Verdrehung beansprucht. Hierbei ist meist nicht die Umfangskraft, sondern Leistung und Drehzahl bekannt.

Das Drehmoment, durch das eine Welle infolge der übertragenen Leistung beansprucht wird, errechnet sich zu:

$$M = 9550 \cdot \frac{P}{n}$$

[M] = Nm; [P] = kW; [n] = 1/min

↪ TAB: S.37

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v = F \cdot \omega \cdot r = F \cdot 2\pi \cdot f \cdot \frac{d}{2} = M \cdot 2\pi \cdot f$$

Aufgabe 1

Eine glatte Welle aus S275J2G3 mit $d = 24\text{mm}$ wird auf Torsion beansprucht.

- Wie groß ist die zulässige Torsionsspannung?
- Wie groß ist das übertragbare Moment M_t ?

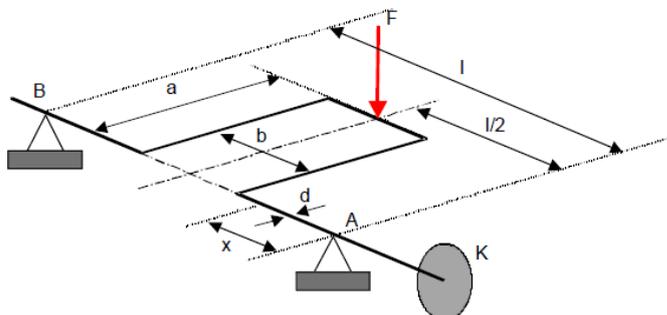
Aufgabe 2

Eine Hohlwelle aus C60 mit $D = 36\text{mm}$ und $d = 22\text{mm}$ soll eine konstante Leistung von 62kW bei einer Drehzahl von $n = 4250\text{ U/min}$ übertragen.

- Wie groß ist die Torsionsspannung?
- Wie groß ist die Sicherheit gegen Torsionsbruch?
- Wie groß ist die Torsionsspannung an der Wellen-Innenwand?

Aufgabe 3

An einer Kurbelwelle ist für die gezeichnete Stellung zu bestimmen:



Daten der Kurbelwelle:

$$F = 1500\text{ N},$$

$$a = 100\text{ mm},$$

$$d = 20\text{ mm}$$

- Welches Drehmoment gibt die Kurbelwelle an der Kupplung K ab?
- Wie groß ist das polare Widerstandsmoment?
- Wie groß ist die Torsionsspannung?

Aufgabe 4

Eine Welle aus E295 soll bei $n = 300\text{ 1/min}$ eine Leistung von 20 kW in einer Drehrichtung übertragen.

Berechnen Sie den erforderlichen Wellendurchmesser.

Aufgabe 5

Mit einem zweiarmigen Steckschlüssel sollen Befestigungsschrauben M20 mit einem Drehmoment von 410 Nm angezogen werden.

- Wie groß ist der erforderliche Durchmesser d für eine zulässige Spannung von 500N/mm^2 ?
- Welche Hebellänge l muss man bei einer Handkraft $F = 250\text{N}$ wählen?



$$1) \quad \sigma_e = 265 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{\text{TF}} = 0,17 \cdot \sigma_e = 185,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = 2714,3 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{\text{TF}} = \frac{M_T}{W_p} \rightarrow M_T = \tau_{\text{TF}} \cdot W_p = \underline{\underline{503,5 \text{ Nm}}}$$

$$2) \quad a) \quad \tau_T = \frac{M_T}{W_p}$$

$$M_T = 9550 \cdot \frac{P}{n} = \underline{\underline{139,3 \text{ Nm}}} = 139300 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

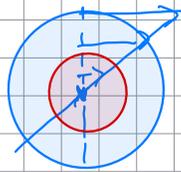
$$W_p = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{16 \cdot D} = \underline{\underline{7883,2 \text{ mm}^3}}$$

$$\tau_T = \underline{\underline{17,6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}}$$

$$b) \quad \tau_{\text{TF}} = 0,17 \cdot \sigma_e = 0,17 \cdot 340 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 238 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$v = \frac{\tau_{TF}}{\tau_T} = \underline{13,5}$$

c)



Torsionsspannung steigt linear an

$$d_A (36 \text{ mm}) \rightarrow 17,6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$d_i (22 \text{ mm}) \rightarrow \frac{22}{36} \cdot 17,6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\rightarrow \underline{\tau_{T,i} = 10,8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}$$

3) a) $M = F \cdot a = 150000 \text{ N} \cdot \text{mm}$

b) $W_p = \frac{\pi d^3}{16} = 1570,8 \text{ mm}^3$

c) $\tau_T = \frac{M}{W_p} = 95,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

4)

$$M = 9850 \frac{\text{N}}{\text{mm}} = 636,7 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

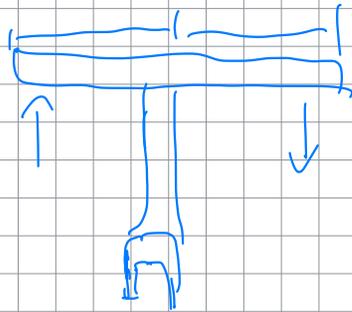
$$\tau_{TF} = 0,7 \cdot \sigma_e = 0,7 \cdot 295 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} = 206,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{TF} = \frac{M_T}{W_p} \rightarrow W_p = \frac{M_T}{\tau_{TF}} = 3083,3 \text{ mm}^3$$



$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot W_p}{\pi}} = \underline{25 \text{ mm}}$$

S)



a) $M = 410 \text{ N} \cdot \text{m} = 410\,000 \text{ Nmm}$

$$\tau_{\text{zul}} = 500 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{\text{zul}} = \frac{M}{W_p} \rightarrow W_p = 820 \text{ mm}^3$$

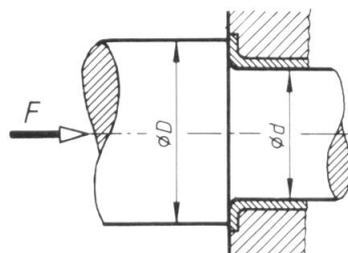
$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \rightarrow \underline{d = 16,1 \text{ mm}}$$

b) $M = F \cdot l$, hier $F = 2 \cdot F_{\text{Hand}} = 500 \text{ N}$

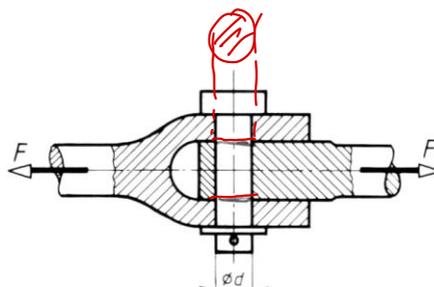
$$l = \frac{M}{F} = \frac{410 \text{ Nm}}{500 \text{ N}} = \underline{0,82 \text{ m}}$$

Hausaufgabe

- 1) Eine Zuglasche auf Flachstahl 60 x 6 wird durch 12 kN belastet. Wie groß ist die Zugspannung?
- 2) Wie groß ist die höchste Zugbelastung, die eine Schraube M16 aufnehmen kann, wenn die zulässige Spannung 90 N/mm² nicht überschreiten darf?
- 3) Ein Drahtseil soll 90 kN Last tragen. Wie viele Drähte von 1,6 mm Durchmesser muss das Seil haben, wenn 200 N/mm² Spannung zulässig sind?
- 4) 160 kN wirken auf einen quadratischen Querschnitt, dessen zulässige Flächenpressung 4 N/mm² beträgt. Bestimmen Sie die Kantenlänge.
- 5) Die skizzierte Welle mit dem Zapfendurchmesser $d = 80\text{mm}$ wird durch eine Axialkraft 5 kN belastet. Sie soll vom Bund bei einer Flächenpressung von 2,5 N/mm² aufgenommen werden. Berechnen Sie den Bunddurchmesser D .



- 6) Das skizzierte Stangengelenk wird mit 1,9 kN belastet. Bestimmen Sie den Bolzendurchmesser für eine zulässige Abscherspannung von 60 N/mm².





$$1) \sigma_z = \frac{F}{A} = \frac{12000 \text{ N}}{b \text{ mm} \cdot b_0 \text{ mm}} = \underline{\underline{33,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}}$$

$$2) \sigma_{z,zul} = \frac{F}{A} \rightarrow F = \sigma_{z,zul} \cdot A$$

$A \hat{=}$ Spannungsquerschnitt \rightarrow TAB

"M", Nennmaß für Regelgewinde

$$S = 157 \text{ mm}^2$$

$$F = 14,13 \text{ kN}$$

$$3) \sigma_z = \frac{F}{A} \rightarrow A = \frac{F}{\sigma_z} = \frac{90000 \text{ N}}{200 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} = 450 \text{ mm}^2$$

$$A_D = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (1,6 \text{ mm})^2}{4} = 2,011 \text{ mm}^2$$

$$\Rightarrow A_{ges} = n \cdot A_D \Rightarrow n = 223,8$$

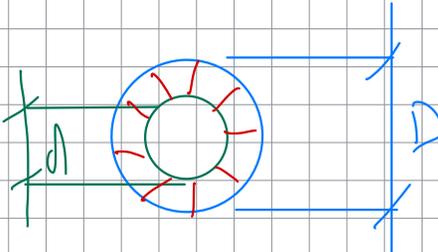
\rightarrow 224 Drähte



$$4) \quad p = \frac{F}{A} \rightarrow A = \frac{F}{p} = \frac{160000 \text{ N}}{4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} = 40000 \text{ mm}^2$$

$$A_{\square} = a^2 \rightarrow \underline{a = 200 \text{ mm}}$$

$$5) \quad p = \frac{F}{A} \rightarrow A = \frac{F}{p} = \frac{5000 \text{ N}}{2,5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} = \underline{2000 \text{ mm}^2}$$

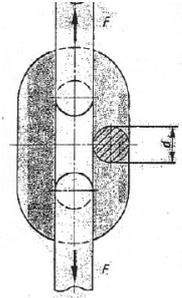
$$A = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4}$$


$$\Rightarrow D = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi} + d^2} = \underline{94,586 \text{ mm}}$$

$$b) \quad \tau_{\text{abs}} = \frac{F}{2 \cdot A} \rightarrow A = \frac{F}{2 \cdot \tau_{\text{abs}}} = \underline{15,833 \text{ mm}^2}$$

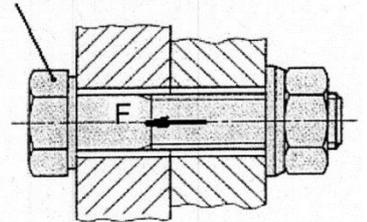
$$A = \frac{\pi d^2}{4} \rightarrow d = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{\pi}} = \underline{4,49 \text{ mm}}$$

Für einen Kran, der eine Last F von 10kN hebt, soll eine Rundkette ausgewählt werden. Wie gross muss der Durchmesser ϕ d bei einer zulässigen Spannung von 64N/mm^2 mindestens sein?

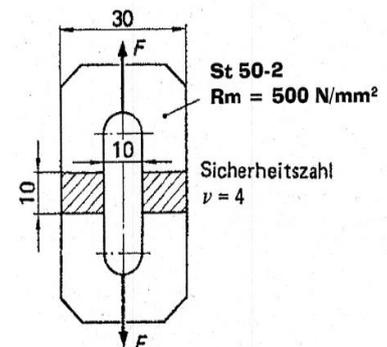


Wie gross darf bei der Schraube die Zugkraft höchstens sein, wenn die zulässige Spannung höchstens 70% von der Steckgrenze betragen darf?
Für Querschnitt A gilt der Spannungsquerschnitt aus dem Tabellenbuch!

DIN 931 M12x30-10.9

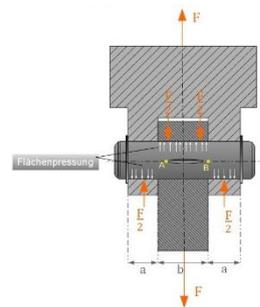


Bestimme die zulässige Zugkraft in der Lasche.
Angaben gemäss Zeichnung.

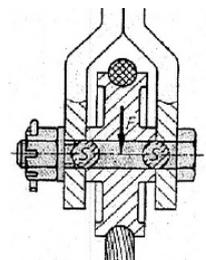


Ein Bolzen ϕ 60mm muss eine Zylinderkraft auf einen Ausleger (2x Blech 6mm) übertragen. Der Zylinder wird mit 280bar betrieben und hat einen Kolbendurchmesser von 130mm.

- Welche Zylinderkraft entsteht?
- Welche Flächenpressung entsteht?



Der Tragbolzen der Seilrolle hat einen $\phi = 20\text{mm}$. Wie gross ist die Scherspannung, wenn eine Belastung von $F = 25 \text{ kN}$ auftritt?

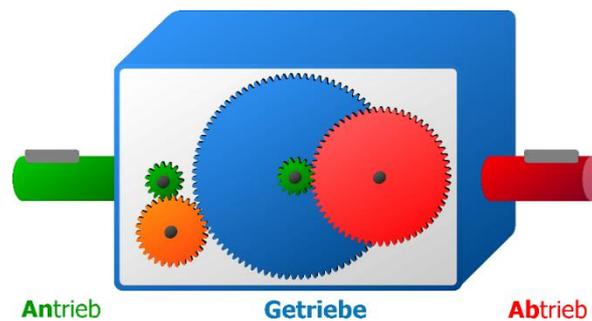


Getriebetechnik

Grundbegriffe und Funktionen

In vielen Maschinen sind Getriebe eingebaut. Wozu sind sie eigentlich erforderlich? Getriebe sind mechanische Bauteile (Maschinenelemente) zum Übertragen und Wandeln von Bewegungsgrößen:

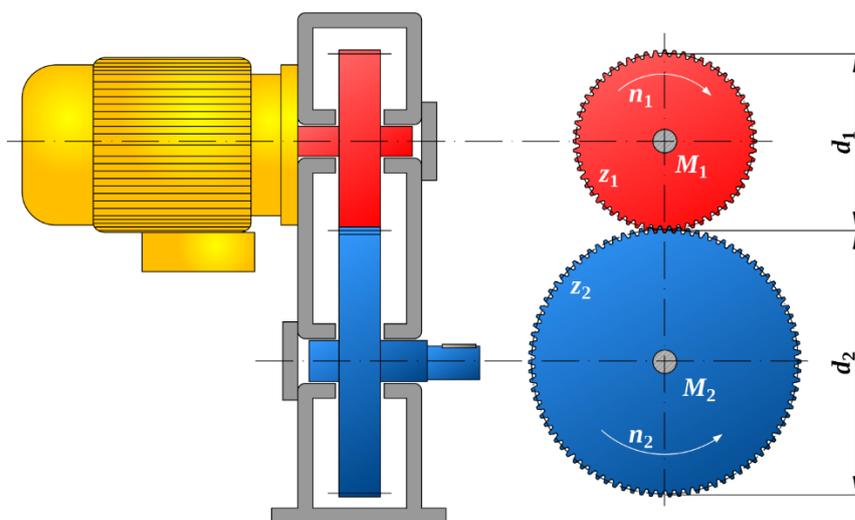
- Drehzahlen
- Drehmomenten
- Drehrichtungen
- Kräften



Ein Getriebe besitzt in der Regel einen Antrieb, an dem die Bewegungsgröße von einer Kraftmaschine „eingespeist“ wird (z. B. von einem Motor, Windrädern, o.ä.), sowie einen Abtrieb, an dem eine Arbeitsmaschine angeschlossen ist.

Zumeist sind es mechanische Vorrichtungen, können aber auch auf hydraulischen, seltener auf pneumatischen oder elektromagnetischen Prinzipien beruhen.

Als Hauptfunktion von Getrieben können die Übertragung und Wandlung von Drehzahlen und Drehmomenten gesehen werden. Sie werden auch eingesetzt, um eine Drehbewegung in eine Längsbewegung umzuwandeln und umgekehrt. Somit können sie Maschinenteile in eine bestimmte Lage bringen oder mit einer bestimmten Geschwindigkeit bewegen.



Hierfür gibt es vielfältige Funktionen:

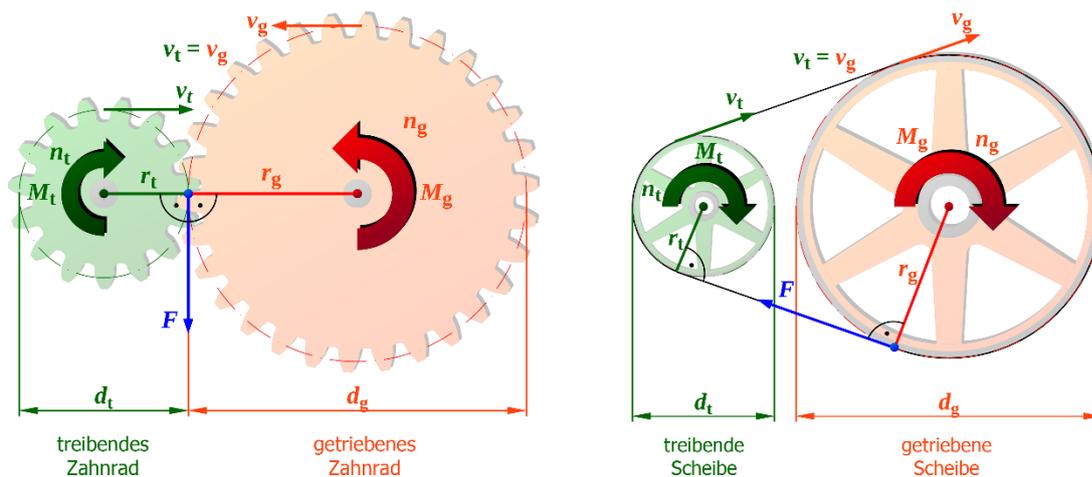
- Fahrzeuge, Fahrtriebe (z.B. Bahnen, Straßenfahrzeuge)
- Pumpen, Lüfter, Kompressoren
- Förderantriebe
- Hubantriebe (z.B. Krane, Aufzüge)
- Positionierantriebe (Werkzeugwechsler)
- Werkzeugantriebe für Maschinen und handgeführte Geräte

In einigen Fällen gelingt es, Antriebe zu finden, die in ihrem Drehmoment- und Drehzahlbereich direkt zu den Erfordernissen passen. In vielen anderen Fällen sind zur Anpassung von Drehzahl und Drehmoment Getriebe notwendig, die typischerweise recht hohe Drehzahl des Antriebs (also bspw. eines Elektromotors) auf eine geringere Drehzahl heruntersetzen und dabei das abgegebene Drehmoment erhöhen.

Mathematische Zusammenhänge

Übersetzungsverhältnis

Bei allen Getrieben, ungeachtet ob es sich dabei um Reibrad-, Zahnrad- oder Zugmittelgetriebe handelt, sind die Umfangsgeschwindigkeiten der miteinander verbundenen Räder gleich. Die übertragenen Kräfte an der Eingriffsstelle sind ebenfalls identisch; hier gilt das Wechselwirkungsprinzip: Actio = Reactio.





Aus diesen Überlegungen lässt sich die wesentliche Kenngrößen eines Getriebes, das Übersetzungsverhältnis i , ableiten. Nach DIN ist als Übersetzungsverhältnis „der Quotient aus Drehzahl der Kraftmaschine (Getriebeeingang) und Drehzahl der Arbeitsmaschine (Getriebeausgang) definiert.“

$$v_1 = v_2 \quad \text{mit } v = \pi * d * n$$

$$V = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\pi \cdot d}{T} = \pi \cdot d \cdot n$$

$$\pi * d_1 * n_1 = \pi * d_2 * n_2$$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

Bei Zahnrädern wird der Durchmesser d durch das Produkt aus Zähnezahzahl und Modul ersetzt. Der Modul, auch als Durchmesserenteilung bezeichnet, ist ein indirektes Maß für die Größe der Zähne von Zahnrädern. Zwei Zahnräder müssen denselben Modul aufweisen, damit die Zahnräder gepaart werden können, sie also miteinander „kämmer“.

$$m = \frac{d}{z}, \text{ also } d = m * z$$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{m * z_2}{m * z_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

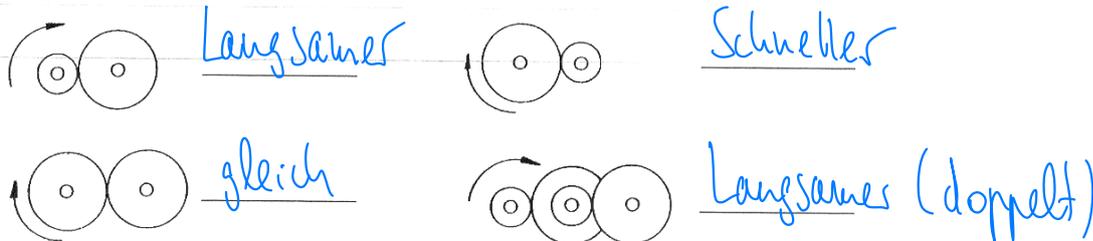
Das Übersetzungsverhältnis kann also berechnet werden als:

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

Ist das Übersetzungsverhältnis $i > 1$, wird die Ausgangsdrehzahl verkleinert, man spricht von einer Untersetzung bzw. Übersetzung ins Langsame. Ist das Übersetzungsverhältnis $i < 1$, wird die Drehzahl erhöht, man spricht von einer Übersetzung ins Schnelle.

Übungen

1. Um welche Art von Übersetzung handelt es sich bei den folgenden 4 Beispielen?



2. Die Flügel einer Windmühle drehen sich viermal in der Minute. Der angeschlossene Mahlstein aber nur zweimal. Berechnen Sie das Übersetzungsverhältnis.

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{4 \text{ min}^{-1}}{2 \text{ min}^{-1}} = 2 \quad (2:1)$$

3. Das Antriebszahnrad eines Stirnradgetriebes hat 99 Zähne. Das Abtriebszahnrad hat 33 Zähne. Berechnen Sie das Übersetzungsverhältnis.

$$i = \frac{z_2}{z_1} = \frac{33}{99} = 1:3 = 0,3$$

4. Berechnen Sie das Übersetzungsverhältnis des Reibradgetriebes eines Plattenspielers. Durchmesser des Plattentellers 300mm, Durchmesser des Antriebsrades 4mm.

$$i = \frac{d_2}{d_1} = \frac{300 \text{ mm}}{4 \text{ mm}} = 75$$

5. Für ein Getriebe mit mehreren Übersetzungsstufen soll i_G berechnet werden! Stufe 1 hat eine Übersetzung von $i = 4:1$. Stufe 2 hat eine Übersetzung von $i = 8:1$. Stufe 3 hat eine Übersetzung von $i = 3:1$.

Mehrstufige Übersetzung

Ist das gewünschte Übersetzungsverhältnis einstufig nicht erreichbar oder wäre der Platzbedarf zu groß, werden mehrstufige Getriebe eingesetzt. Jedes Räderpaar, das dabei ineinandergreift, stellt eine sogenannte Getriebestufe dar und ist durch ein bestimmtes Übersetzungsverhältnis charakterisiert.

Das Gesamtübersetzungsverhältnis errechnet sich aus dem Produkt der Einzelübersetzungen:

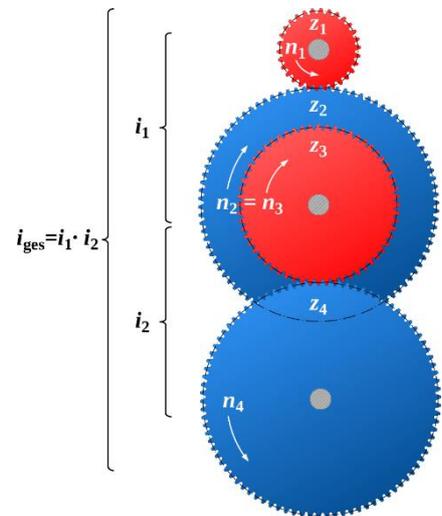
$$i_{ges} = i_1 * i_2 * \dots$$

$$i_{ges} = \frac{z_2}{z_1} * \frac{z_4}{z_3} * \dots$$

Für die Bestimmung des Gesamtübersetzungsverhältnisses in Bezug auf die Anfangsdrehzahl (n_a) zur Enddrehzahl (n_e) muss man sich verdeutlichen, dass jeweils zwei Zahnräder fest mit einer Welle verbunden sind, also entsprechend gleich Drehzahlen aufweisen. Bei fortlaufender Belegung mit Indizes gilt also:

$$n_2 = n_3; n_4 = n_5; \dots$$

$$i_{ges} = \frac{n_1}{n_2} * \frac{n_3}{n_4} * \frac{n_5}{n_6} \dots$$



Es ergibt sich unter Berücksichtigung (also Kürzen) der gleich großen Drehzahlen:

$$i_{ges} = \frac{n_a}{n_e}$$

Mehrstufige Getriebe bieten also den Vorteil, das gewünschte Übersetzungsverhältnis auf mehrere kleinere Zahnräder aufzuteilen und so die Abmessungen des Getriebes insgesamt klein zu halten.

Formeln zum Berechnen des Übersetzungsverhältnisses i_G

$$i_G = \frac{n_A}{n_E} \quad \text{Hier muss die Anfangsdrehzahl } n_A \text{ und die Enddrehzahl } n_E \text{ gezählt werden,}$$

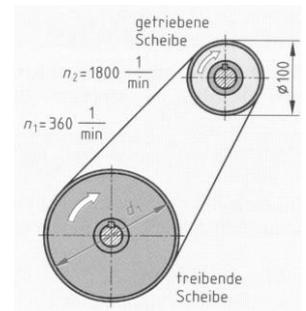
$$i_G = \frac{z_2 * z_4 * z_6 *}{z_1 * z_3 * z_5 *} \quad \text{Hier muss die Anzahl der Zahnradzähne gezählt werden}$$

$$i_G = i_1 * i_2 * i_3 * \quad \text{Hier müssen die Einzelverhältnisse multipliziert werden}$$

Aufgaben

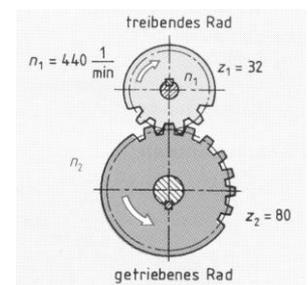
Aufgabe 1

Berechnen Sie den Durchmesser der treibenden Scheibe sowie das Übersetzungsverhältnis.



Aufgabe 2

Berechnen Sie die Drehzahl n_2 und das Übersetzungsverhältnis i .



Aufgabe 3

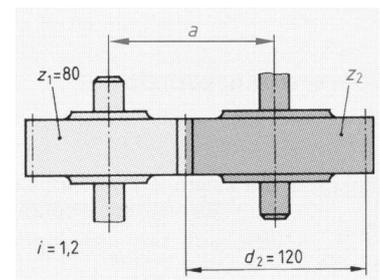
Ein Elektromotor mit der Drehzahl $n_1 = 1425$ 1/min treibt über eine Flachriemenscheibe von 180mm Durchmesser eine Maschine an, deren Riemenscheibe 450mm Durchmesser hat.

Berechnen Sie die Drehzahl der getriebenen Scheibe sowie das Übersetzungsverhältnis.

Aufgabe 4

Das Übersetzungsverhältnis zweier Zahnräder beträgt 1,2. Das treibende Rad hat 80 Zähne, der Teilkreisdurchmesser des getriebenen Rades ist 120mm.

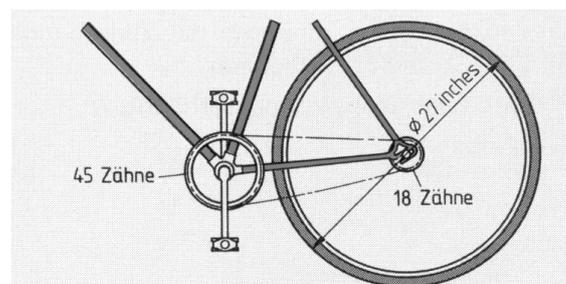
- Berechnen Sie die Zähnezahzahl des getriebenen Rades.
- Wie groß ist der Achsabstand beider Räder?



Aufgabe 5

Für den Kettenantrieb des Fahrrades sind zu berechnen:

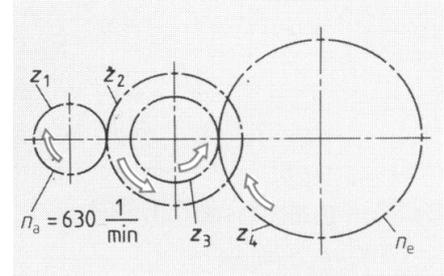
- Das Übersetzungsverhältnis.
- Die Drehzahl am Tretrad für eine Fahrgeschwindigkeit von 18 km/h.
- Die Fahrgeschwindigkeit, die erreicht wird, wenn bei einer Drehzahl des Tretrades von 50 1/min durch die Nabenschaltung noch eine Übersetzung $i_2 = 1,3$ eingelegt werden kann.



Aufgabe 6

$n_a = 630 \text{ 1/min}$; $z_1 = 50$; $z_2 = 75$; $z_3 = 35$; $z_4 = 105$

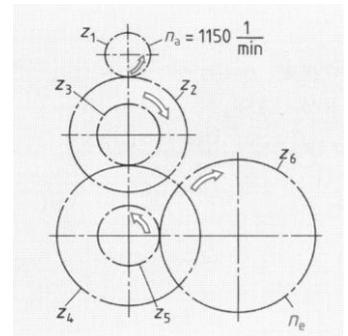
Berechnen Sie i_1 , i_2 , i , n_e !



Aufgabe 7

$n_a = 1150 \text{ 1/min}$; $z_1 = 25$; $z_2 = 50$; $z_3 = 40$; $z_4 = 70$; $z_5 = 35$; $z_6 = 115$

Berechnen Sie i_1 , i_2 , i_3 , i , n_e !

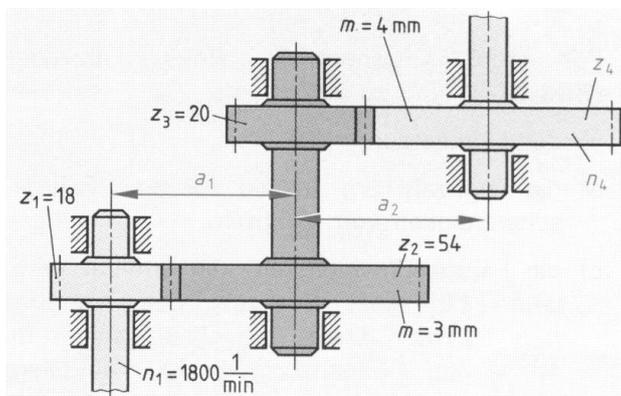


Aufgabe 8

Das Gesamtübersetzungsverhältnis des dargestellten doppelten Zahnradtriebs ist $i = 7,5$.

Wie groß sind

- Die Einzelübersetzungen i_1 und i_2 ?
- Die Zähnezah z_4 ?
- Die Drehzahl n_4 ?
- Die Achsabstände a_1 und a_2 ?



$$1) \quad i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{5}$$

$$i = \frac{d_2}{d_1} \Rightarrow d_1 = \frac{d_2}{i} = \underline{500 \text{ mm}}$$

$$2) \quad i = \frac{z_2}{z_1} = \frac{5}{2}$$

$$i = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow n_2 = \frac{n_1}{i} = \underline{176 \frac{1}{\text{min}}}$$

$$3) \quad i = \frac{d_2}{d_1} = \frac{5}{2}$$

$$i = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow n_2 = \frac{n_1}{i} = \underline{570 \frac{1}{\text{min}}}$$

$$4) \quad a) \quad i = \frac{z_2}{z_1} \Rightarrow z_2 = i \cdot z_1 = \underline{96}$$

$$b) \quad a = \frac{d_1 + d_2}{2} = \underline{110 \text{ mm}}$$

$$\rightarrow i = \frac{d_2}{d_1} \Rightarrow d_1 = \frac{d_2}{i} = \underline{100 \text{ mm}}$$

$$5) \quad a) \quad i = \frac{z_2}{z_1} = \frac{2}{5}$$

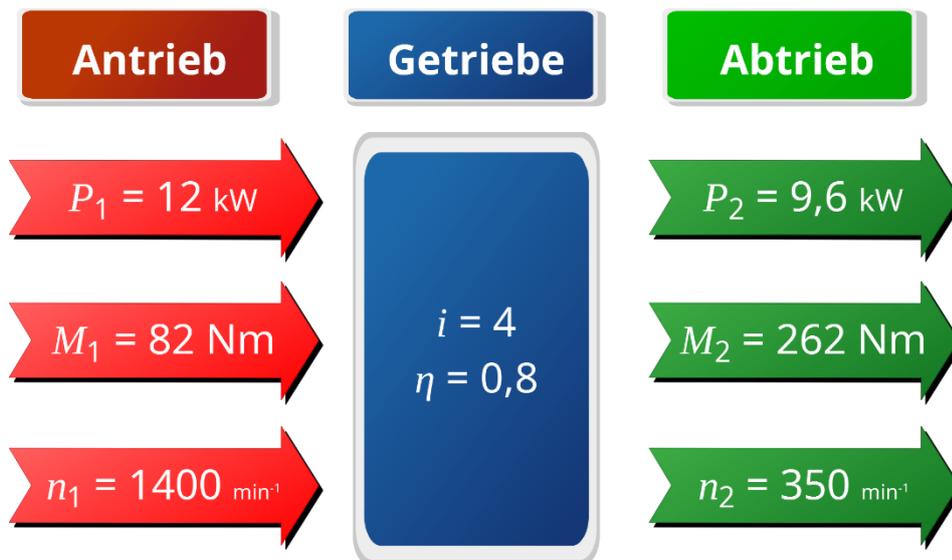
$$b) \quad V = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\pi \cdot d}{1} = \pi \cdot d_2 \cdot n_2 \Rightarrow n_2 = \frac{V}{\pi \cdot d_2} \quad \text{mit } d_2 = 27.2 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow n_2 = \underline{140 \frac{1}{\text{min}}} \quad ; \quad i = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow n_1 = i \cdot n_2 = \underline{56 \frac{1}{\text{min}}}$$

$$c) \quad i = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow n_2 = \frac{n_1}{i} = \underline{38.46 \frac{1}{\text{min}}} \quad ; \quad V = \pi \cdot d_2 \cdot n_2 = \underline{5 \frac{\text{km}}{\text{h}}}$$

Drehmomentenwandlung

Die Wandlung der Drehzahlen zweier Zahnräder oder einer mehrstufigen Anordnung ist eine der Aufgaben eines Getriebes. Eine weitere Bewegungsgröße, die damit geändert werden soll, ist das Drehmoment. Aufgrund des Prinzips der Energieerhaltung ist mit dieser Drehzahländerung stets eine Änderung des Drehmomentes verbunden – und technisch auch gewünscht.



Ausgangspunkt der zugehörigen Herleitung ist die Überlegung, dass aufgrund des Energieerhaltungssatzes die zugeführte Leistung P_1 im Idealfall (ohne Verluste; diese werden anschließend berücksichtigt) gleich der abgegebenen Leistung P_2 sein muss:

$$P_1 = P_2$$

$$F_1 \cdot v_1 = F_2 \cdot v_2$$

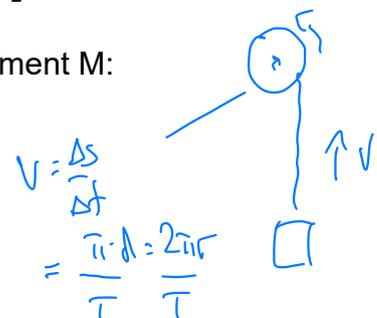
$$F_1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot n_1 = F_2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot n_2$$

Handwritten: $p = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v$

Das Produkt aus „Kraft F mal Hebelarm r “ ergibt das Drehmoment M :

$$M_1 \cdot n_1 = M_2 \cdot n_2$$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{M_2}{M_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_2}{d_1} = i$$



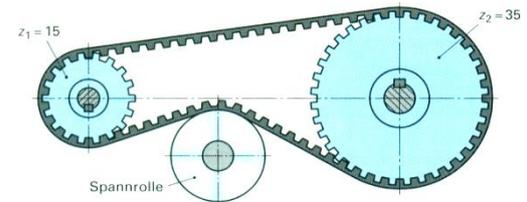
Erhöht ein Getriebe also die Drehzahl, so reduziert es im selben Maße das Drehmoment und umgekehrt.

Formeln und Zusammenhänge siehe auch Tabellenbuch, Kapitel 2 (Technische Physik), Abschnitt 2.3

Aufgabe 1

Die Zahnriemenscheibe $z_1 = 15$ wird mit dem Drehmoment $M_1 = 240 \text{ Nm}$ angetrieben. Wie groß sind

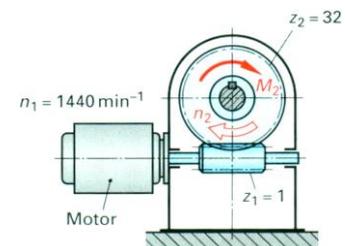
- die Übersetzung des Zahnriementriebes,
- das Drehmoment an der getriebenen Scheibe mit $z_2 = 35$?



Aufgabe 2

An der Abtriebswelle des Schneckengetriebes ist das Drehmoment $M_2 = 80 \text{ Nm}$ erforderlich. Wie groß sind

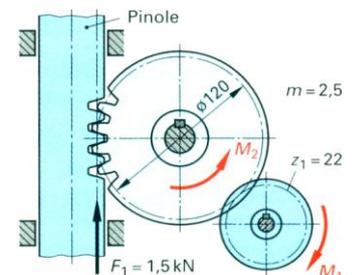
- die Drehzahl n_2 bei der Motordrehzahl $n_1 = 1440/\text{min}$,
- das Drehmoment M_1 des Motors?



Aufgabe 3

An der Pinole einer Montagepresse ist eine Kraft $F = 1,5 \text{ kN}$ erforderlich. Sie wird über zwei Zahnräder angetrieben. Wie groß sind

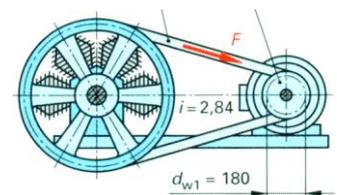
- das Drehmoment M_2 ,
- das Drehmoment M_1 des Antriebsrades mit der Zähnezahl $z_1 = 22$ und dem Modul $m = 2,5 \text{ mm}$?



Aufgabe 4

Ein luftgekühlter Kolbenkompressor wird über Keilriemen angetrieben. Der Motor gibt ein Drehmoment $M_1 = 48 \text{ Nm}$ ab. Wie groß sind

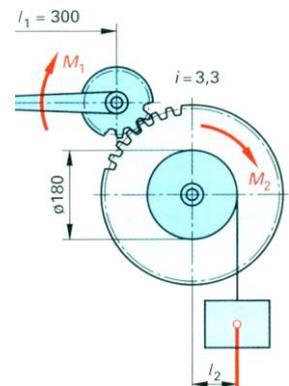
- die Zugkraft F im Keilriemen,
- das Drehmoment am Kompressor?



Aufgabe 5

Mit der Räderwinde soll eine Last $F_G = 2 \text{ kN}$ gehoben werden. Wie groß sind

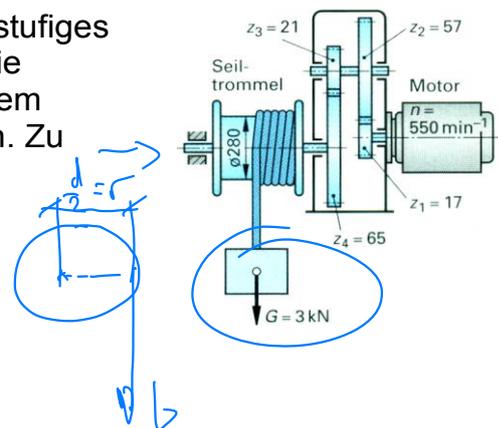
- das Drehmoment M_2 an der Seiltrommel,
- das Drehmoment M_1 an der Antriebswelle bei einem Übersetzungsverhältnis $i = 3,3$,
- die Umfangskraft F_U an den Zahnflanken bei einem Modul $m = 3 \text{ mm}$ und der Zähnezah $z_1 = 30$,
- die aufzubringende Handkraft F_1 ?



Aufgabe 6

Die Seiltrommel eines Hubwerkes wird über ein zweistufiges Zahnradgetriebe angetrieben. Das Getriebe besitzt die Zähnezahlen $z_1 = 17$, $z_2 = 57$, $z_3 = 21$ und $z_4 = 65$. Mit dem Hubwerk werden Höchstlasten von $G = 3 \text{ kN}$ gehoben. Zu berechnen sind

- die Drehzahl der Seiltrommel,
- die Hubgeschwindigkeit der Last,
- das Drehmoment an der Seiltrommel,
- das Drehmoment am Motor.



Mechanische Leistung

Unter Leistung versteht man die verrichtete Arbeit pro Zeit, Arbeit wiederum ist das Produkt aus Kraft mal Weg:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v$$

Betrachtet man (wie bei Motoren, Pumpen, Getrieben, etc.) die Leistungserbringung bei Drehbewegungen setzt man für die Geschwindigkeit v die Umfangs-/Bahngeschwindigkeit ein:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{\pi \cdot d}{T} = \pi \cdot d \cdot n$$

Damit und unter Berücksichtigung von $M = F \cdot r$, bzw. $M = F \cdot 0,5 \cdot d$ ergibt sich:

$$P = F \cdot \pi \cdot d \cdot n = M \cdot 2 \cdot \pi \cdot n$$



$$a) \quad i_g = i_1 \cdot i_2 = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3} = \underline{10,4}$$

$$i_g = \frac{n_1}{n_4} \rightarrow n_4 = \frac{n_1}{i_g} = 53 \frac{1}{\text{min}}$$

$$b) \quad v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\pi \cdot d}{T} = \pi \cdot d \cdot n = \underline{0,77 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

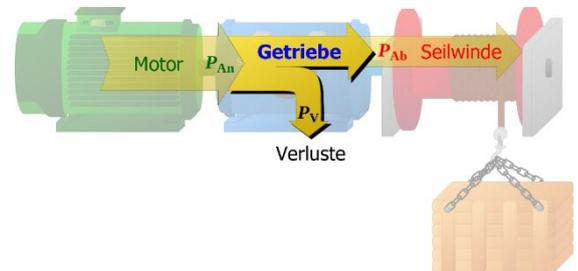
$$c) \quad M_{Tr} = F_n \cdot \frac{d}{2} = \underline{420 \text{ Nm}}$$

$$d) \quad M_2 = i \cdot M_1 \rightarrow M_1 = M_{\text{Motor}} = \frac{M_2}{i} = \frac{M_{Tr}}{i} \\ = \underline{40,5 \text{ Nm}}$$

$$e) \quad P = \frac{M_{Tr} \cdot n_1}{9550} =$$

Wirkungsgrad

Bislang wurde der Idealfall eines verlustfreien Systems betrachtet; die unvermeidlichen Reibungseffekte bewirken jedoch eine Leistungsminderung und damit für eine Verringerung des theoretisch berechneten Drehmomentes an der getriebenen Welle. Diese Leistungsverluste werden über den Getriebewirkungsgrad η_G berücksichtigt:



Eine Maschine nimmt also stets mehr Leistung auf, als sie abgibt, da durch Reibung und ungenutzte Wärme Verluste entstehen. Die abgegebene Leistung ist also stets kleiner als die zugeführte Leistung.

Das Verhältnis von abgegebener Leistung P_2 zu zugeführter Leistung P_1 wird als Wirkungsgrad η bezeichnet. Der Wirkungsgrad ist stets kleiner als 1 bzw. kleiner als 100%.

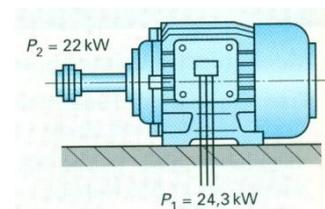
$$\eta_G = \frac{P_2}{P_1}$$

Den Gesamtwirkungsgrad erhält man aus dem Produkt der Einzelwirkungsgrade. Der Gesamtwirkungsgrad ist stets kleiner als der kleinste Einzelwirkungsgrad.

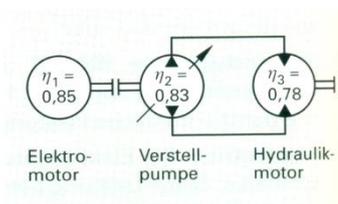
$$\eta_{ges} = \eta_1 * \eta_2 * \eta_3 * \dots$$

Aufgaben

1) Für den Elektromotor ist der Wirkungsgrad zu berechnen.



2) Wie groß ist der Gesamtwirkungsgrad der elektrohydraulischen Antriebseinheit?

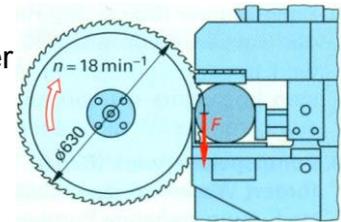


3) An einer Werkzeugmaschine werden die folgenden Leistungsdaten ermittelt: vom Motor aufgenommene Leistung 12,5 kW; vom Motor an das Getriebe abgegebene Leistung 9,8 kW; vom Getriebe an die Arbeitsspindel abgegebene Leistung 7,2 kW.

Wie groß sind

- der Wirkungsgrad des Elektromotors,
- der Wirkungsgrad des Getriebes,
- der Gesamtwirkungsgrad?

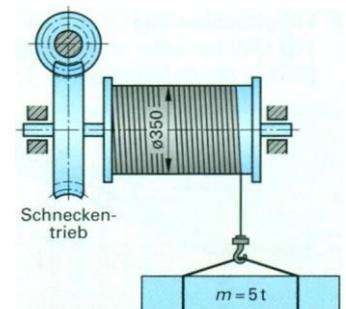
- 4) Das Sägeblatt der Kaltkreissäge läuft mit der Drehzahl $n = 18 \text{ min}^{-1}$ und hat einen Durchmesser $d = 630 \text{ mm}$. Der Antriebsmotor entnimmt dem Netz $4,3 \text{ kW}$ Leistung. Der Gesamtwirkungsgrad der Kaltkreissäge beträgt $0,65$.



- Wie groß ist die Leistung am Sägeblatt?
- Wie groß ist das Drehmoment am Sägeblatt?
- Welche Schnittkraft tritt am Umfang des Sägeblattes auf?

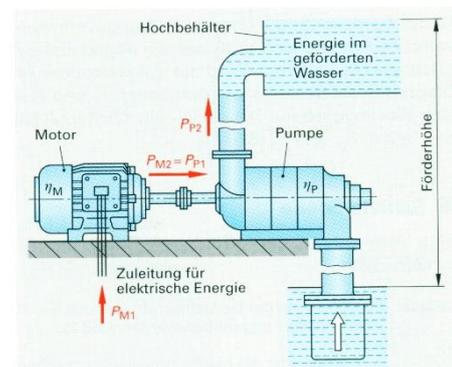
- 5) Wie groß ist der Wirkungsgrad eines Dieselmotors für einen Schiffsantrieb, der bei einem Probelauf 160 kW Leistung abgibt und dabei in einer halben Stunde $20,18 \text{ l}$ Dieselkraftstoff verbraucht? Die Energie in einem Liter Dieselkraftstoff (Heizwert) beträgt rund $37\,000 \text{ kJ}$.

- 6) Welche Leistung nimmt der Antriebsmotor der Seilwinde beim Anheben einer Masse von 5 Tonnen Stahl auf? Die Hubgeschwindigkeit beträgt $1,5 \text{ m/min}$, der Schneckentrieb hat einen Wirkungsgrad von 80% , der Elektromotor von 86% .



- 7) Die Kreiselpumpe fördert 66 Liter Wasser je Sekunde auf eine Höhe von 51 m . Wie groß sind

- die notwendige Förderleistung der Pumpe,
- die vom Motor an die Pumpe abzugebende Leistung, wenn der Pumpenwirkungsgrad $0,75$ beträgt,
- die vom Motor aufgenommene Leistung bei einem Motorwirkungsgrad von 85% ,
- der Gesamtwirkungsgrad?





$$P_{\text{Hub}} = \overline{F_g} \cdot v_{\text{Hub}} = 5000 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,5 \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

$i_{60} \rightarrow \leq$

$$= 1250 \text{ W}$$

$1,5 \frac{\text{m}}{60 \text{ s}}$

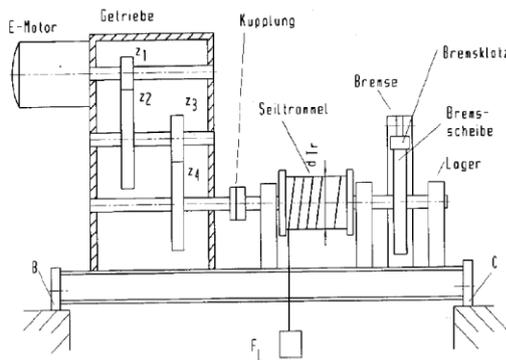
$$\eta_{\text{ges}} = \eta_1 \cdot \eta_2 = 0,688$$

$$\eta_{\text{ges}} = \frac{P_{\text{ab}}}{P_{\text{zu}}} = \frac{P_{\text{Hub}}}{P_{\text{N}}} \rightarrow P_{\text{N}} = \frac{P_{\text{Hub}}}{\eta_{\text{ges}}} = \underline{\underline{1817 \text{ W}}}$$

Aufgabe 1

Mit der Hubeinrichtung einer Krananlage sollen Lasten gehoben werden. Das Hubseil wird auf eine Seiltrommel gewickelt, die von einem Elektromotor über ein zweistufiges Getriebe angetrieben wird.

Überprüfen Sie, ob die Last F_L gehoben werden kann.



Motor:

$$P_{\text{mot}} = 10 \text{ kW}$$

$$n_{\text{mot}} = 720 \text{ 1/min}$$

Getriebe:

$$z_1 = 16;$$

$$z_3 = 20; z_2 = 64;$$

$$z_4 = 80; \eta_{\text{getr}} = 0,8$$

Seiltrommel:

$$d_{\text{Tr}} = 200 \text{ mm}$$

$$F_L = 15 \text{ kN}$$

$$\eta_{\text{tr}} = 0,95$$

Aufgabe 2

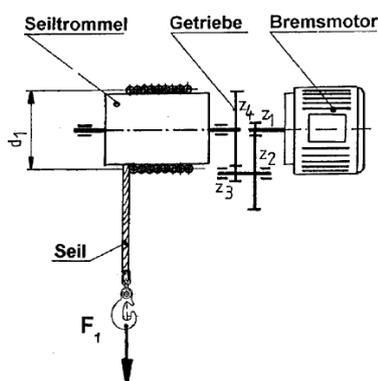
Die Pumpenwelle der Hydraulikanlage eines LKWs erfordert ein Antriebsmoment von $M_p = 100 \text{ Nm}$ bei einer Drehzahl von $n_p = 1000 \text{ min}^{-1}$. Die Pumpe wird vom Fahrzeugmotor über ein einstufiges Getriebe angetrieben.

Berechnen Sie die abgegebene Motorleistung und die Motordrehzahl: $i = 2,5$; $\eta_G = 0,9$

Aufgabe 3

Der Antrieb der Seiltrommel in der Hubeinrichtung eines Wandschwenkkrans erfolgt durch einen Bremsmotor über ein Getriebe.

Bestimmen Sie die notwendige Motorleistung und die Hebegeschwindigkeit.



$$\eta_{\text{Getriebe}} = 0,9$$

$$n_{\text{Motor}} = 1400 \text{ 1/min}$$

$$d_1 = 200 \text{ mm}$$

$$z_1 = z_3 = 12$$

$$z_2 = z_4 = 144$$

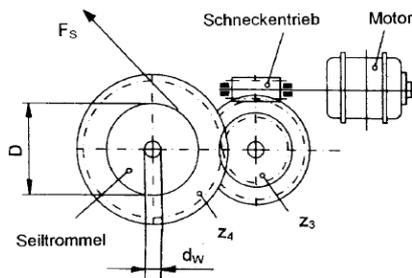
maximale Seilkraft

$$F_1 = 2500 \text{ N}$$

Aufgabe 4

Zwischen Elektromotor und Seil einer Verladeanlage sitzen ein Schnecken- und ein einstufiger Stirnradtrieb.

Berechnen Sie die erforderliche Leistung des Elektromotors.



Motor:

$$n_M = 1440 \text{ 1/min}$$

Schneckentrieb:

$$i_1 = 30:1; \eta_1 = 0,8$$

Stirnradtrieb:

$$z_3 = 18; z_4 = 85$$

$$\eta_2 = 0,95$$

Seiltrommel:

$$D = 300 \text{ mm}$$

$$F_S = 100 \text{ kN}$$

Aufgabe 5

Der Antrieb der Seiltrommel eines Turmdrehkrans erfolgt über einen Elektromotor und ein Getriebe.

$$\text{Motor } n_M = 1500 \text{ min}^{-1}$$

$$\text{Getriebe } i = 50:1$$

$$\text{Wirkungsgrad } \eta_G = 0,8$$

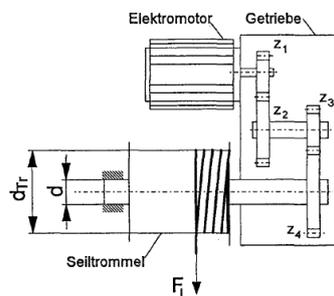
$$\text{Seiltrommel } d_T = 500 \text{ mm}$$

$$\text{Hublast } F_L = 10 \text{ kN}$$

Ermitteln Sie die Hubgeschwindigkeit der Last.
Welche Leistung muss der Elektromotor abgeben?

Aufgabe 6

Ein Elektromotor eines Drehkrans treibt über ein zweistufiges Getriebe die Seiltrommel an der Laufkatze an.



$$n_M = 1400 \text{ min}^{-1}$$

$$d_{TR} = 200 \text{ mm}$$

$$z_1 = 12$$

$$z_2 = 75$$

$$z_3 = 14$$

$$z_4 = 90$$

$$F_L = 17 \text{ kN}$$

- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit in m/min, mit der die Last angehoben wird.
- Welche Leistung gibt der Motor bei einem Getriebewirkungsgrad von 90 % ab?



Diese Gleichungen erfordern (wie in der Physik) das Verwenden der SI-Einheiten, also N, s⁻¹, Nm, m, W. In der Technik wird die Drehzahl n allerdings üblicherweise in min⁻¹ angegeben, die Leistung P in kW.

Die Zusammenfassung der Umrechnung von Sekunde zu Minute, Watt zu Kilowatt und der Zahlenwert von π liefern eine sog. Zahlenwertgleichung:

$$P = \frac{M \cdot n}{9550}$$

$$M = 9550 \cdot \frac{P}{n} \quad [M] = \text{Nm}; [P] = \text{kW}; [n] = 1/\text{min}$$

Aufgabe 7

Auf einem Motoren-Leistungsprüfstand wird bei einer Drehzahl von $n = 5300 \text{ min}^{-1}$ ein Drehmoment von 117 Nm gemessen. Wie groß ist die Motorleistung?

Aufgabe 8

Ein Elektromotor treibt über einen Riemen eine Maschine an.

Seine Leistung beträgt 7,4 kW, seine Drehzahl 1450 min⁻¹. Wie groß ist die Zugkraft im Riemen, wenn die Riemenscheibe einen Durchmesser von $d = 355 \text{ mm}$ hat?

Aufgabe 9

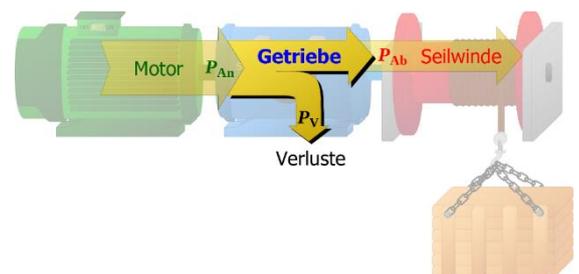
Welche Leistung hat ein Hydraulikmotor, der einer Drehzahl von 750 min⁻¹ ein Drehmoment von 67,5 Nm abgibt?

Aufgabe 10

Wie groß ist das Drehmoment eines Elektromotors, der bei einer Drehzahl von 1400 min⁻¹ eine Leistung von $P = 1,8 \text{ kW}$ abgibt?

Wirkungsgrad

Bislang wurde der Idealfall eines verlustfreien Getriebes betrachtet; die unvermeidlichen Reibungseffekte bewirken jedoch eine Leistungsminderung und damit für eine Verringerung des theoretisch berechneten Drehmomentes an der getriebenen Welle. Diese Leistungsverluste werden über den Getriebewirkungsgrad η_G berücksichtigt:



$$\eta_G = \frac{P_2}{P_1}$$

$$6) \quad i_1 = \frac{z_2}{z_1} = \frac{3}{2} ; \quad i_2 = \frac{z_4}{z_3} = \frac{3}{1} ; \quad i_{ges} = i_1 \cdot i_2 = \underline{\underline{\frac{9}{2}}}$$

$$i_{ges} = \frac{n_a}{n_e} \Rightarrow n_e = n_4 = \frac{n_a}{i_{ges}} = \underline{\underline{140 \frac{1}{min}}}$$

$$7) \quad i_1 = \frac{z_2}{z_1} = 2 ; \quad i_2 = \frac{z_4}{z_3} = \frac{7}{4} ; \quad i_3 = \frac{z_6}{z_5} = \frac{23}{7}$$

$$i_{ges} = i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 = \underline{\underline{\frac{23}{2}}}$$

$$i_{ges} = \frac{n_a}{n_e} \Rightarrow n_e = \frac{n_a}{i_{ges}} = \underline{\underline{100 \frac{1}{min}}}$$

$$8) \quad a) \quad i_1 = \frac{z_2}{z_1} = 3 ; \quad i_{ges} = 7,5 = i_1 \cdot i_2 \Rightarrow i_2 = \underline{\underline{2,5}}$$

$$b) \quad i_2 = \frac{z_4}{z_3} \rightarrow z_4 = i_2 \cdot z_3 = \underline{\underline{50}}$$

$$c) \quad n_4 = n_e ; \quad i_{ges} = \frac{n_a}{n_e} = \frac{n_1}{n_4} \Rightarrow n_4 = \frac{n_1}{i_{ges}} = \underline{\underline{240 \frac{1}{min}}}$$

$$d) \quad a_n = \frac{d_1 + d_2}{2} = \text{mit } d = m \cdot z$$

$$a_1 = \frac{m \cdot z_1 + m \cdot z_2}{2} = \frac{m}{2} \cdot (z_1 + z_2) = \underline{\underline{108 \text{ mm}}}$$

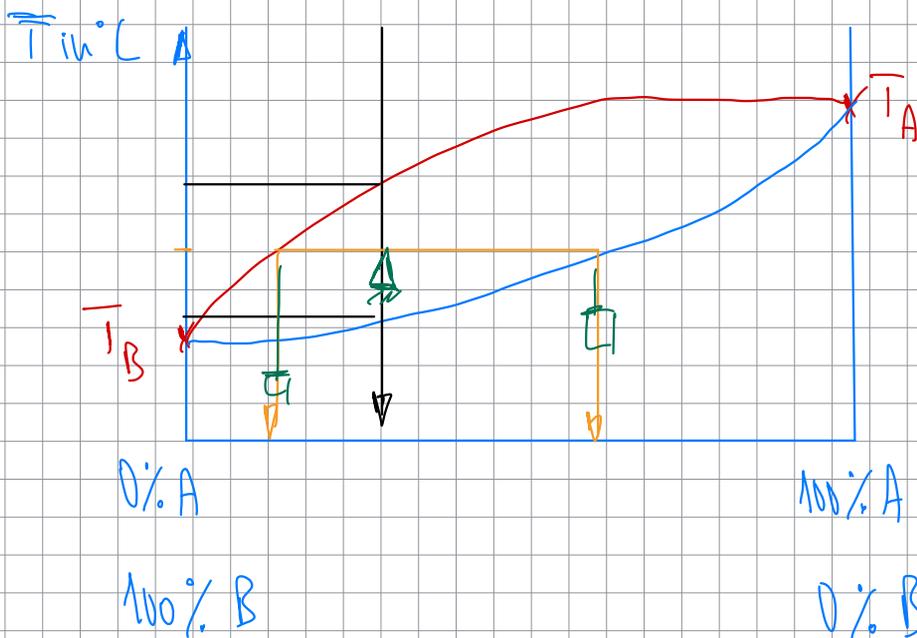
$$a_2 = \frac{m}{2} \cdot (z_3 + z_4) = \underline{\underline{140 \text{ mm}}}$$



Wiederholung Werkstoffkunde

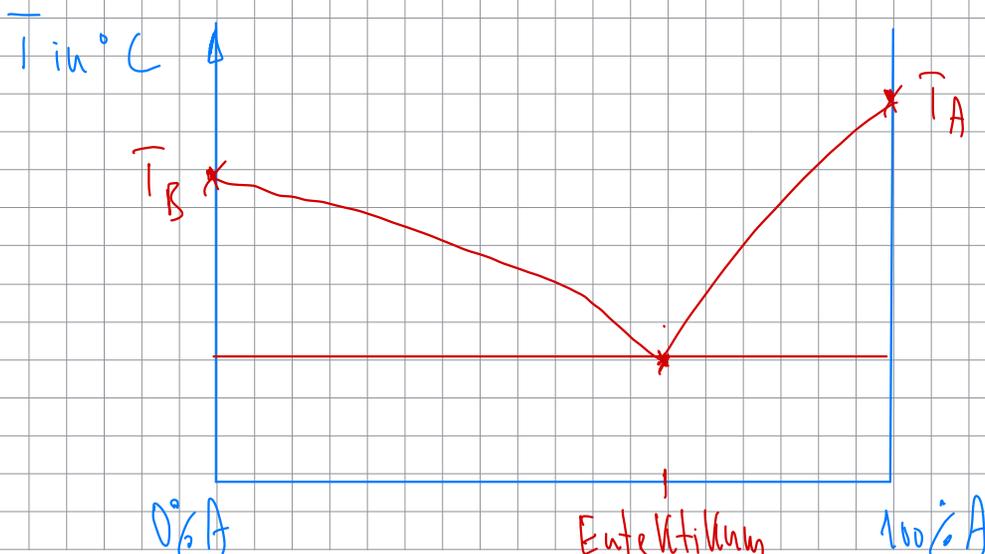
2-Stoff-Legierungen

- Mischkristall \Rightarrow gemeinsame Gitter beider Stoffe



T_A/T_B
Schmelzpunkte

- Kristallgemisch \Rightarrow getrennte Gitter + Körner





MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT
BADEN-WÜRTTEMBERG

ABITURPRÜFUNG AM BERUFLICHEN GYMNASIUM IM SCHULJAHR 2019/2020

Nachprüfung	AUFGABEN FÜR DAS FACH
1.5.1	Mechatronik (TG)

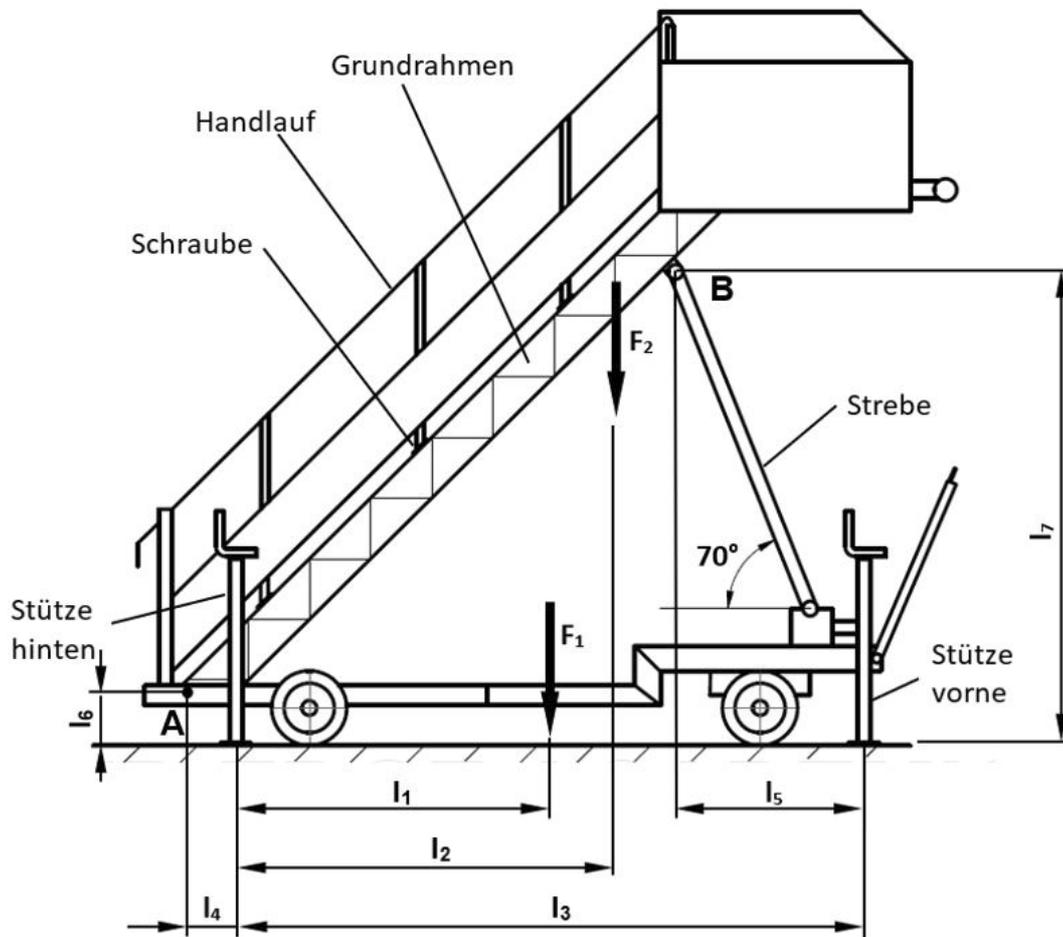
Arbeitszeit	270 Minuten
Hilfsmittel	Eingeführtes Tabellenbuch Elektrotechnik Eingeführte Formelsammlung Elektrotechnik Eingeführtes Tabellenbuch in Maschinenbau Formelblatt Energietechnik Zugelassener Taschenrechner Nachschlagewerk für die deutsche Rechtschreibung
Stoffgebiet	Teil 1: Pflichtbereich Maschinenbau Aufgabe 1: Fluggasttreppe (3 Seiten) Teil 2: Pflichtbereich Elektrotechnik Aufgabe 2: OPV, Leuchtstofflampe, Schaltnetzteil (6 Seiten) (inkl. 2 Arbeitsblätter) Teil 3: Wahlbereich Mechatronische Systeme Aufgabe 3: Säge einer Fertighausfirma (4 Seiten) (inkl. 1 Arbeitsblatt) Aufgabe 4: Füllanlage für Farbeimer (3 Seiten)
Bemerkungen	Die Aufgaben 1 und 2 (Pflichtbereiche) sind von allen Prüflingen zu bearbeiten. Aus den Aufgaben 3 und 4 (Wahlbereich) wählt der Prüfling eine Aufgabe aus. Der Aufgabensatz umfasst 17 Seiten (inklusive diesem Deckblatt). Sie sind verpflichtet, die Vollständigkeit des Aufgabensatzes umgehend zu überprüfen und fehlende Seiten den aufsichtführenden Lehrern anzuzeigen. Jede Aufgabe ist mit einem neuen Bogen zu beginnen. Bitte entnehmen Sie den Aufgaben die beigefügten Arbeitsblätter und geben Sie diese mit Ihrer Reinschrift ab. Lösungswege müssen klar und eindeutig dargestellt werden. Bei Verstößen gegen die angemessene Darstellungsform kann ein Punkteabzug erfolgen.

Nachprüfung 2019/2020	Berufliches Gymnasium (TG)	
1.5.1	Mechatronik (Maschinenbau)	
	Teil 1 (Pflichtbereich)	Aufgabe 1 (3 Seiten)

1 Fluggasttreppe

Punkte

Passagiere nutzen Fluggasttreppen zum Ein- und Aussteigen, wenn ein Flugzeug auf einer Außenposition des Flughafens geparkt ist.



Daten:

$$\begin{aligned}
 l_1 &= 1680 \text{ mm} & l_2 &= 2150 \text{ mm} & l_3 &= 3330 \text{ mm} \\
 l_4 &= 160 \text{ mm} & l_5 &= 880 \text{ mm} & l_6 &= 250 \text{ mm} & l_7 &= 2200 \text{ mm} \\
 F_1 &= 5800 \text{ N (Untergestell)} & F_2 &= 15000 \text{ N (Treppe, Passagiere)}
 \end{aligned}$$

- 1.1 Abstützeinrichtungen erhöhen die Standsicherheit der Fluggasttreppe. Die Räder sind dabei unbelastet. Berechnen Sie die Aufstandskräfte an den vier Stützen.

3

Nachprüfung 2019/2020	Berufliches Gymnasium (TG)	
1.5.1	Mechatronik (Maschinenbau)	
	Teil 1 (Pflichtbereich)	Aufgabe 1 (3 Seiten)

- 1.2 Die Treppe ist im Lager A mit dem Untergestell verbunden und wird im Lager B durch zwei Streben abgestützt.

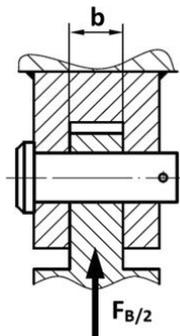
Punkte

4

Ermitteln Sie Kräfte in den Lagern A und B.

- 1.3 Die Treppe ist in B mittels einer Bolzenverbindung mit den Streben verbunden. Ermitteln Sie den erforderlichen Bolzendurchmesser d_B .

4



Daten:

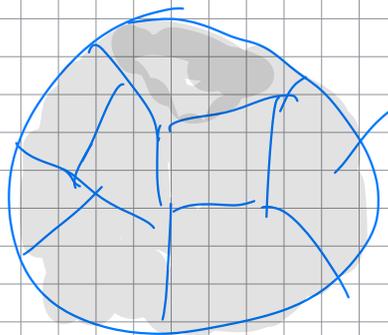
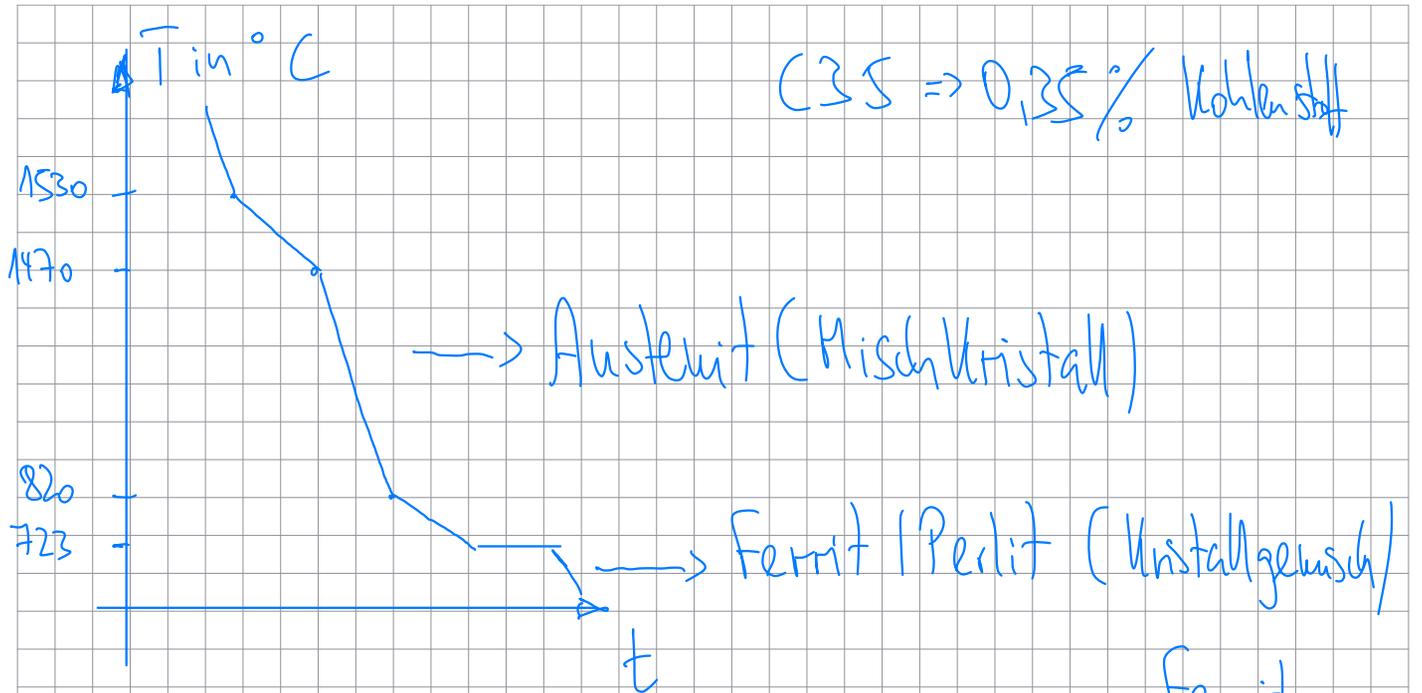
- | | |
|---------------------------------|-------------------------------|
| Bolzenwerkstoff | C35E |
| Kraft in einer Bolzenverbindung | $F_{B/2} = 5600 \text{ N}$ |
| Stegbreite | $b = 15 \text{ mm}$ |
| Sicherheit gegen Abscheren | $v = 4$ |
| Zulässige Flächenpressung | $p_{zul} = 30 \text{ N/mm}^2$ |
- 1.4 Die Seitenteile mit Handlauf sind mit dem Grundrahmen der Treppe verschraubt. In jeder Schraube der Festigkeitsklasse 8.8 wirkt eine Spannkraft von $F_{Sp} = 12 \text{ kN}$. Bestimmen Sie den Nenndurchmesser eines metrischen Gewindes bei einer Sicherheit von $v = 3$.
- 1.5 Die Werkstoffeigenschaften des Bolzens (C35E) sollen untersucht werden.
- 1.5.1 Skizzieren Sie mit Hilfe des Fe-Fe₃C-Diagramms die Abkühlungskurve des Stahles C35E für langsames Abkühlen aus der Schmelze bis Raumtemperatur. Geben Sie die Temperaturen für Knick- und Haltepunkte mit an.
- 1.5.2 Skizzieren Sie die Gefügebilder bei 1200°C und bei Raumtemperatur. Benennen Sie jeweils die Gefügebestandteile.
- 1.5.3 Der Werkstoff hat im normalgeglühten Zustand eine Zugfestigkeit von $R_m = 520 \text{ N/mm}^2$. Durch eine Wärmebehandlung wird die Zugfestigkeit auf $R_m = 700 \text{ N/mm}^2$ erhöht. Wählen Sie das geeignete Wärmebehandlungsverfahren und geben sie die notwendigen Wärmebehandlungstemperaturen an.

2

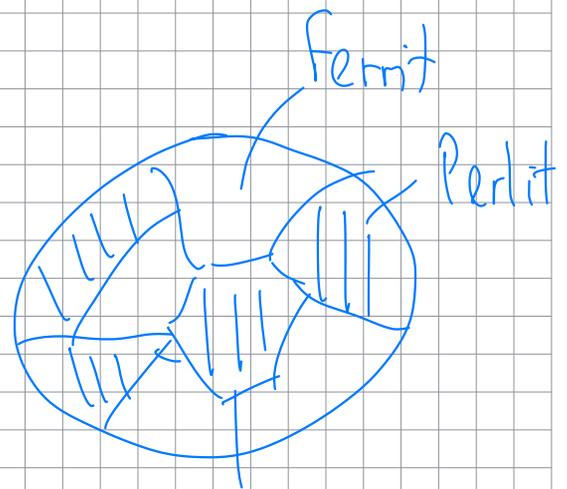
3

2

3



Austenit

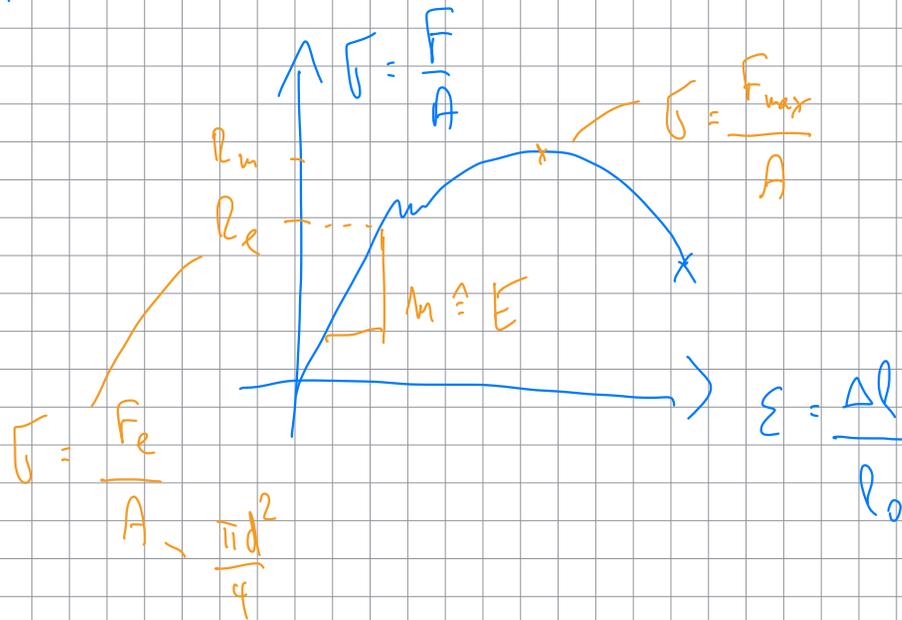
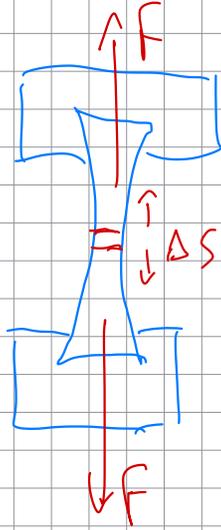


Ferrit

Perlit



Zugversuch





$$p \cdot V = n \cdot R_i \cdot T$$

$$\Rightarrow n = \frac{p \cdot V}{R_i \cdot T}$$

$$p \text{ in Pa} = \frac{N}{m^2}$$

$$V \text{ in } m^3 = m \cdot m \cdot m$$

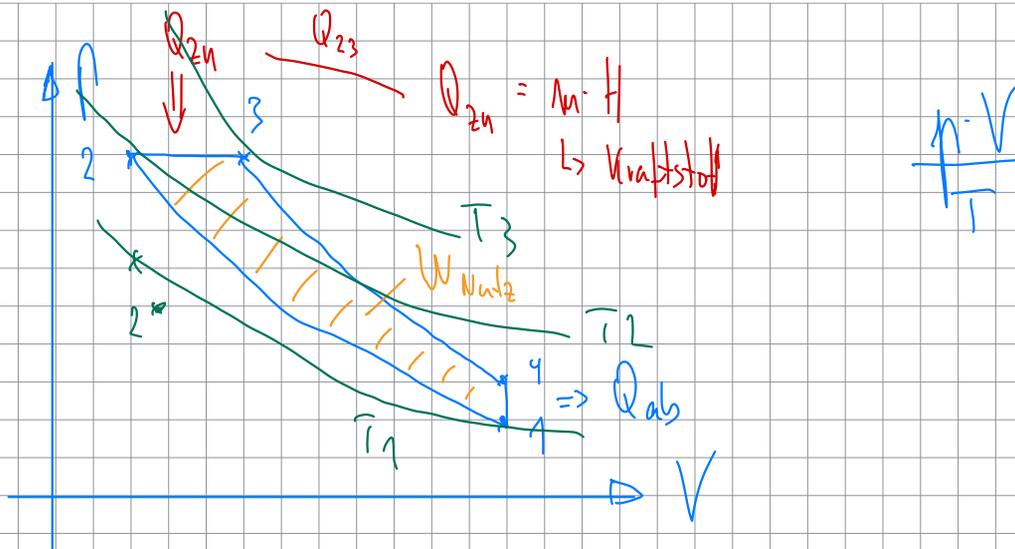
$$T \text{ in K}$$

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$R_i \text{ in } \frac{J}{g \cdot K}$$

Nachprüfung 2019/2020	Berufliches Gymnasium (TG)	
1.5.1	Mechatronik (Maschinenbau)	
	Teil 1 (Pflichtbereich)	Aufgabe 1 (3 Seiten)

		Punkte
1.6	Die Passagiertreppe wird mit Hilfe eines Flughafenschleppers zu den Parkpositionen der Flugzeuge gezogen. Angetrieben wird der Schlepper von einem Dieselmotor.	
1.6.1	Skizzieren Sie für ein Dieselmotor den Kompressionstakt in ein p - V - Diagramm. Kennzeichnen Sie die Kompressionsarbeit und benennen Sie die Zustandsänderung.	2
1.6.2	Berechnen Sie den Druck am Ende des Kompressionstaktes sowie die spezifische Kompressionsarbeit.	4
	<p><u>Daten:</u></p> <p>Ansaugtemperatur $\vartheta_1 = 80^\circ C$</p> <p>Ansaugdruck $p_1 = 0,97 \text{ bar}$</p> <p>Kompressionstemperatur $\vartheta_2 = 800^\circ C$</p>	
1.6.3	Ergänzen Sie in das p - V - Diagramm den Kompressionstakt, wenn dieser isotherm erfolgen würde.	1
1.6.4	Begründen Sie, warum sich in einem Verbrennungsmotor keine isotherme Kompression realisieren lässt.	2
		30



1 → 2, adiabatisch

$$\frac{\bar{T}_1}{\bar{T}_2} = \left[\frac{p_1}{p_2} \right]^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

mit $\kappa = \frac{c_p}{c_v} = 1,4$

$$\sqrt[\frac{\kappa-1}{\kappa}]{\frac{\bar{T}_1}{\bar{T}_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$p_2 = \sqrt[\frac{\kappa-1}{\kappa}]{\frac{p_1}{\bar{T}_2}} = \underline{\underline{47,5 \text{ bar}}}$$

$$W_{12} = \frac{-p_1}{1-\kappa} \cdot (\bar{T}_2 - \bar{T}_1) = 516,6 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

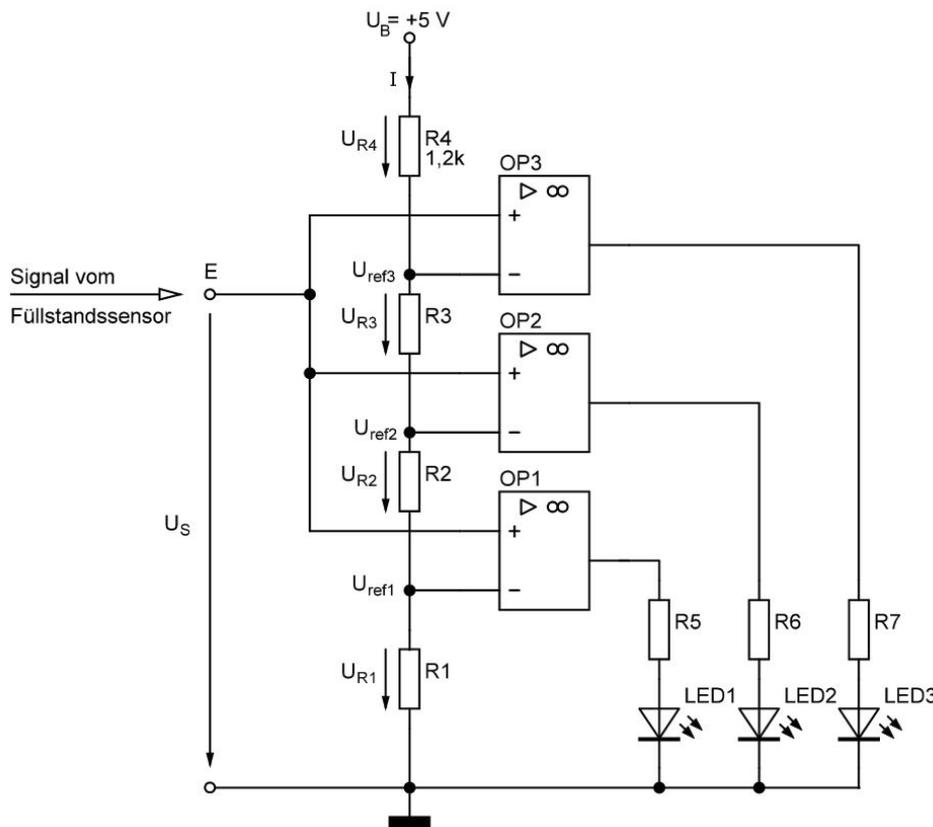
Nachprüfung 2019/2020	Berufliches Gymnasium (TG)	
1.5.1	Mechatronik (Elektrotechnik)	
	Teil 2 (Pflichtbereich)	Aufgabe 2 (6 Seiten)

2 Leuchtbandanzeige, Leuchtstofflampenschaltung, Schaltnetzteil

Punkte

2.1 Leuchtbandanzeige

Für die Füllstandsanzeige eines Tanks kommt die folgende Operationsverstärkerschaltung zum Einsatz. Der Tankfüllstand wird durch einen Füllstandssensor erfasst, dessen Ausgangsspannung U_S im Bereich von 5% bis 95% linear vom Tankfüllstand F abhängt. Die Sensorkennlinie $U_S(F)$ ist auf dem Arbeitsblatt (Seite A2-5) angegeben. Das Sensorsignal U_S liegt am Eingang E der Operationsverstärkerschaltung an. Über eine Leuchtbandanzeige mit den LEDs 1 - 3 wird der Füllstand des Tanks angezeigt. Die Operationsverstärker OP1...OP3 werden als ideal angenommen und mit einer unsymmetrischen Versorgungsspannung von $U_B = 5\text{ V} / 0\text{ V}$ betrieben.



OP-Schaltung zur Ansteuerung der LEDs der Leuchtbandanzeige

- 2.1.1 Nennen Sie die Bezeichnung der Grundschaltung, in der die drei OPs betrieben werden. 1
- 2.1.2 Der Arbeitspunkt der LEDs 1...3 soll mithilfe der Vorwiderstände $R_5 \dots R_7$ so eingestellt werden, dass der Diodenstrom I_F bei maximaler OP-Ausgangsspannung genau 15 mA beträgt. Ermitteln Sie mithilfe des LED-Kennliniendiagramms $I_F(U_F)$ auf dem Arbeitsblatt (Seite A2-5) den passenden Wert des Vorwiderstands. 3
- 2.1.3 Bestimmen Sie den Wert, auf den die Versorgungsspannung $+U_B$ der Operationsverstärker abgesenkt werden muss, damit der Strom durch die LEDs bei unverändertem Vorwiderstand auf einen Wert von $I_F = 10\text{ mA}$ absinkt. 2

Wenn Sie Teilaufgabe 2.1.2 nicht lösen konnten, rechnen Sie hier mit $R_{5/6/7} = 200\ \Omega$.

Nachprüfung 2019/2020	Berufliches Gymnasium (TG)	
1.5.1	Mechatronik (Elektrotechnik)	
	Teil 2 (Pflichtbereich)	Aufgabe 2 (6 Seiten)

Die Leuchtdioden LED1 ... 3 der Leuchtbandanzeige sollen jeweils beim Überschreiten der folgenden Tankfüllstände leuchten:

LED1 leuchtet bei Füllständen $F \geq 10\%$

LED2 leuchtet bei Füllständen $F \geq 50\%$

LED3 leuchtet bei Füllständen $F \geq 90\%$

2.1.4 Ermitteln Sie mithilfe der Füllstandssensor-Kennlinie $U_S(F)$ die Sensorausgangsspannungen $U_{S1,2,3}$ bei den drei Füllständen $F_1 = 10\%$, $F_2 = 50\%$ und $F_3 = 90\%$.

2.1.5 Die Widerstände R_1 , R_2 und R_3 des Referenzspannungsteilers sollen so dimensioniert werden, dass die drei LEDs jeweils ab dem angegebenen Füllstand F_1 bzw. F_2 bzw. F_3 aufleuchten. Der Widerstand R_4 hat einen Wert von $1,2 \text{ k}\Omega$ und die Versorgungsspannung der Schaltung beträgt $U_B = 5 \text{ V}$. Berechnen Sie zunächst den Strom I durch R_4 und anschließend die passenden Werte von R_1 , R_2 und R_3 .

Punkte

1

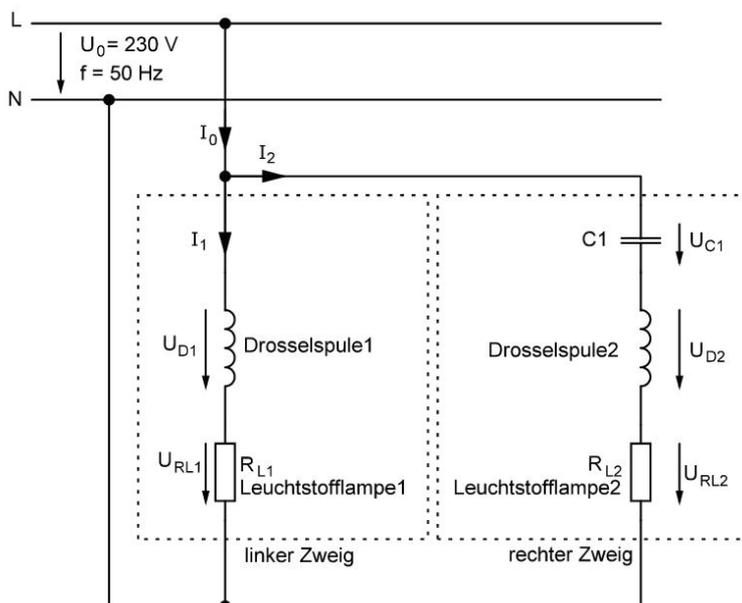
4

Nachprüfung 2019/2020	Berufliches Gymnasium (TG)	
1.5.1	Mechatronik (Elektrotechnik)	
	Teil 2 (Pflichtbereich)	Aufgabe 2 (6 Seiten)

Punkte

2.2 Duo-Schaltung mit Kompensation

Für die Beleuchtungsanlage eines Fabrikraumes wird die im Bild dargestellte Leuchtstofflampenschaltung verwendet. Diese Schaltung wird als Duo-Schaltung bezeichnet. Der linke Zweig mit dem Strom I_1 verhält sich induktiv, der rechte Zweig mit dem Strom I_2 kapazitiv.



Daten der Lampenschaltung

Netzspannung $U_0 = 230 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$

Wirkwiderstand der Drosselspulen $R_{D1} = R_{D2} = 60 \Omega$

Leuchtstofflampen $U_{RL1} = U_{RL2} = 65 \text{ V}$
 $P_{RL1} = P_{RL2} = 28 \text{ W}$

Leuchtstofflampen-Duo-Schaltung

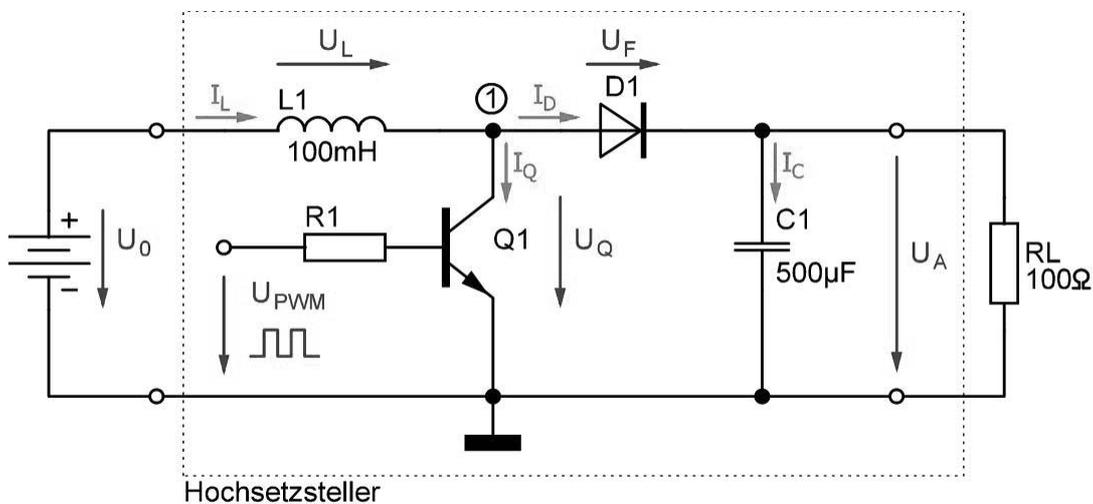
- 2.2.1 Die Leuchtstofflampen und die Drosselspulen in den beiden Zweigen sind identisch. Bei den Drosselspulen handelt es sich um **reale Spulen**. Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild der realen Spule D1 mit den Bauelementbezeichnungen R_{D1} und L_{D1} und tragen Sie die elektrischen Größen U_{RD1} , U_{LD1} , U_{D1} und I_1 in das Schaltbild ein. 2
- 2.2.2 Berechnen Sie die Stromstärke I_1 im linken Zweig. 1
- 2.2.3 Zeichnen Sie bei einer Stromstärke von $I_1 = 0,431 \text{ A}$ das Zeigerdiagramm der Spannungen U_{RL1} , U_{RD1} , U_{LD1} , U_{D1} und U_0 sowie des Stromes I_1 im linken (induktiven) Zweig und bestimmen Sie den Wirkleistungsfaktor $\cos\varphi_1$. Verwenden Sie die Maßstäbe $1 \text{ cm} \hat{=} 20 \text{ V}$ bzw. $1 \text{ cm} \hat{=} 100 \text{ mA}$ für das Zeigerdiagramm. 4
- 2.2.4 Der Kondensator C_1 ist so dimensioniert, dass der Strom I_2 im rechten Zweig **betragsmäßig** gleich groß ist, wie der Strom I_1 im linken Zweig. 3
 Daher gilt: $U_{D2} = U_{D1}$, $U_{RD2} = U_{RD1}$, $U_{LD2} = U_{LD1}$, $U_{RL2} = U_{RL1}$
 Während I_1 jedoch gegenüber U_0 um $\varphi_1 = 66,7^\circ$ **nacheilt**, eilt I_2 (bedingt durch den zusätzlichen Kondensator C_1) der Spannung U_0 um $\varphi_2 = 66,7^\circ$ **voraus**.
 Erstellen Sie eine (nichtmaßstäbliche) Skizze des Zeigerdiagramms mit I_2 , U_{RL2} , U_{RD2} , U_{LD2} , U_{C1} und U_0 und berechnen Sie dann die Kondensatorspannung U_{C1} .

Nachprüfung 2019/2020	Berufliches Gymnasium (TG)	
1.5.1	Mechatronik (Elektrotechnik)	
	Teil 2 (Pflichtbereich)	Aufgabe 2 (6 Seiten)

Punkte

2.3 Hochsetzsteller

Ein mobiles Gerät wird über Batterien mit einer Spannung von $U_0 = 3\text{ V}$ versorgt. Das Gerät wird im nachfolgenden Schaltplan durch den Lastwiderstand R_L modelliert und benötigt eine Gleichspannung von $U_A = 5\text{ V}$. Daher ist zwischen Batterie und R_L ein Hochsetzsteller zwischengeschaltet. Der als ideal angenommene Transistor $Q1$ wird über ein PWM-Rechtecksignal abwechselnd vollständig gesperrt bzw. voll durchgesteuert. Nehmen Sie für die Diode $D1$ eine konstante Fluss-Spannung U_F von $0,7\text{ V}$ in Durchlassrichtung an. Der Kondensator $C1$ dient zur Glättung der Ausgangsspannung U_A .



- 2.3.1 Es sollen die Ströme I_Q , I_L , I_D und I_C sowie die Spannung U_L in der Schaltung betrachtet werden. Füllen Sie dazu die Tabelle auf dem Arbeitsblatt (Seite A2-6) aus. Tragen Sie dort für die beiden Betriebsfälle
- $Q1$ steuert voll durch und
 - $Q1$ sperrt komplett
- ein, ob für den jeweiligen Strom $I < 0$, $I = 0$ oder $I > 0$ bzw. für die Spannung $U_L < 0$, $U_L = 0$ oder $U_L > 0$ gilt.
- 2.3.2 Erklären Sie kurz die Funktionsweise des Hochsetzstellers. Betrachten Sie dabei separat die beiden Betriebszustände des Transistors $Q1$. Begründen Sie, warum die Ausgangsspannung U_A größer ist, als die Eingangsspannung U_0 . 3
- 2.3.3 Erklären Sie, zu welchem Zweck die Diode $D1$ in die Schaltung eingebaut ist. 1
- 2.3.4 Auf dem Arbeitsblatt (Seite A2-6) sind die zeitlichen Verläufe von U_{PWM} und I_L angegeben. Ergänzen Sie die dazu passenden zeitlichen Verläufe von U_L , I_Q und I_D . Gehen Sie dabei von einer näherungsweise idealen, konstanten Ausgangsspannung $U_A = 5\text{ V}$ aus. Verwenden Sie zur Bestimmung von U_L die Maschenregel (Masche über U_L , U_F , U_A und U_0) und zur Bestimmung der Ströme die Knotenregel im Knoten ①. 3

30

Zu- und Vorname:

Schulnummer	Schülernummer

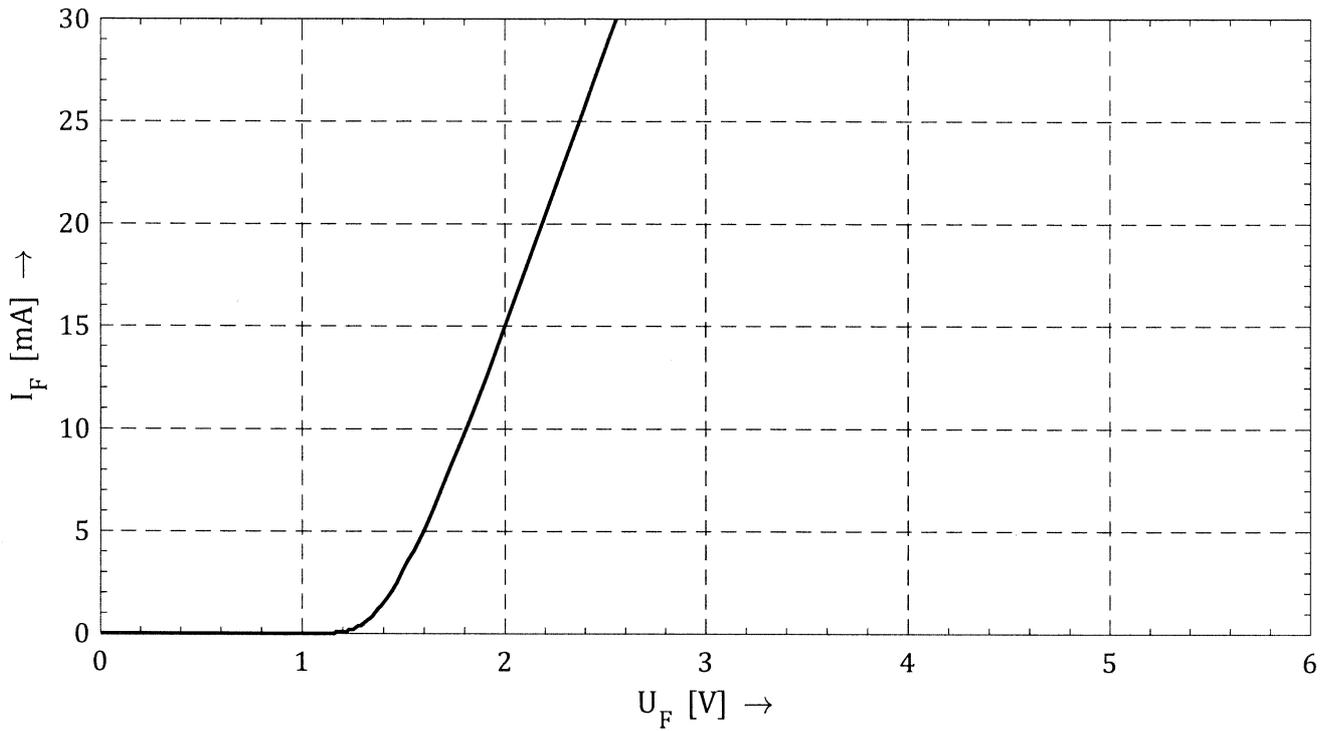
Nachprüfung 2019/2020	Mechatronik (Elektrotechnik)
1.5.1 Arbeitsblatt	Teil 2 (Pflichtbereich) Aufgabe 2



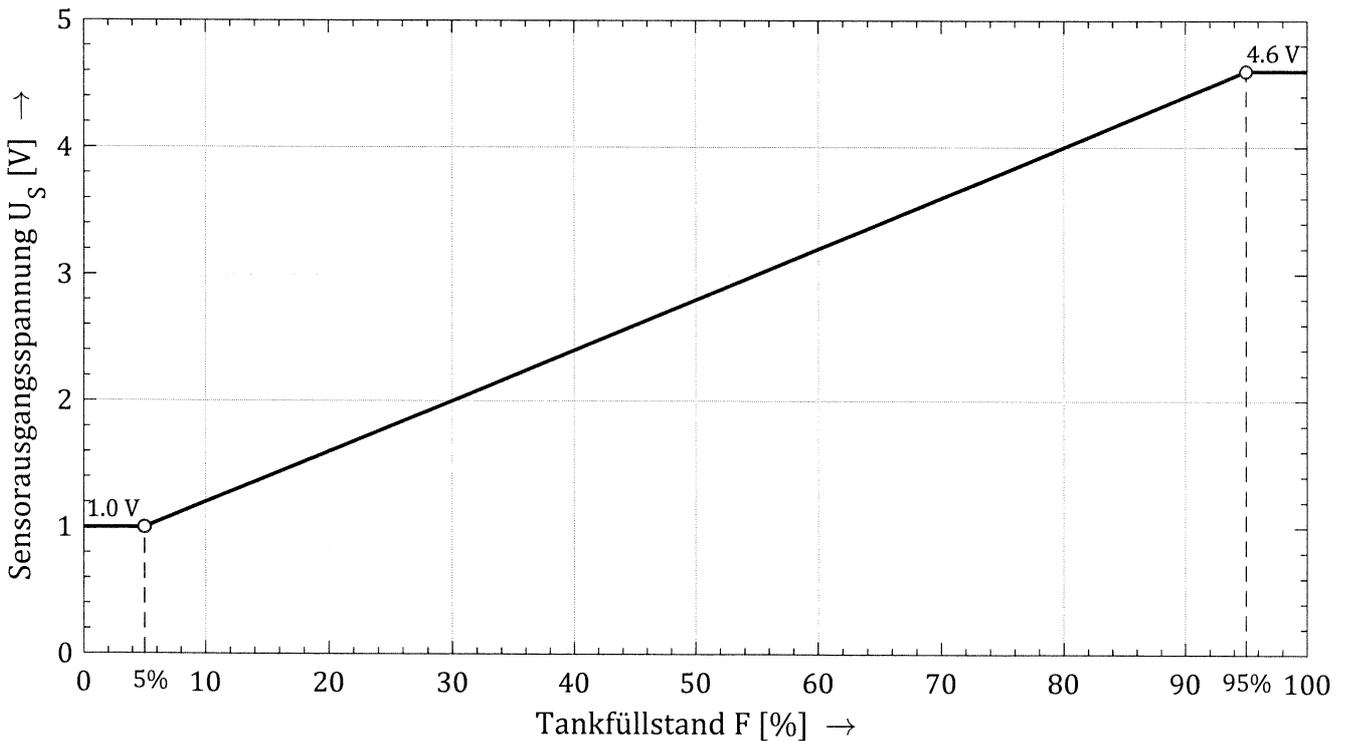
		Schulnummer	Schülernummer
Nachprüfung 2019/2020	Mechatronik (Elektrotechnik)		
1.5.1 Arbeitsblatt	Teil 2 (Pflichtbereich)	Aufgabe 2 (6 Seiten)	

Arbeitsblatt

zu Aufgabe 2.1.2 und 2.1.3: Kennlinie $I_F(U_F)$ der Leuchtdioden



zu Aufgabe 2.1.4: Kennlinie $U_S(F)$ des Tankfüllstandssensors



Zu- und Vorname:

Schulnummer	Schülernummer

Nachprüfung 2019/2020	Mechatronik (Elektrotechnik)
1.5.1 Arbeitsblatt	Teil 2 (Pflichtbereich) Aufgabe 2



		Schulnummer	Schülernummer
Nachprüfung 2019/2020	Mechatronik (Elektrotechnik)		
1.5.1 Arbeitsblatt	Teil 2 (Pflichtbereich)	Aufgabe 2 (6 Seiten)	

Arbeitsblatt

zu Aufgabe 2.3.1: **Ströme und Spannungen in der Hochsetzstellerschaltung**

	Transistor Q1	
	steuert voll durch	sperrt komplett
Transistorstrom I_Q		
Spulenstrom I_L		
Diodenstrom I_D		
Kondensatorstrom I_C		
Spulenspannung U_L		

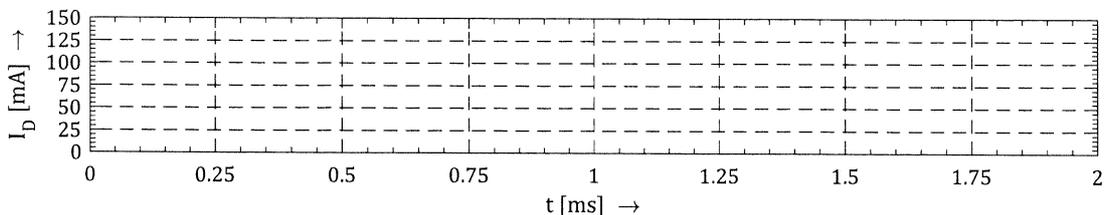
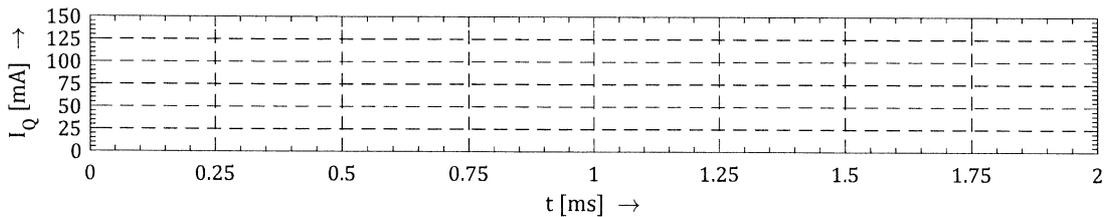
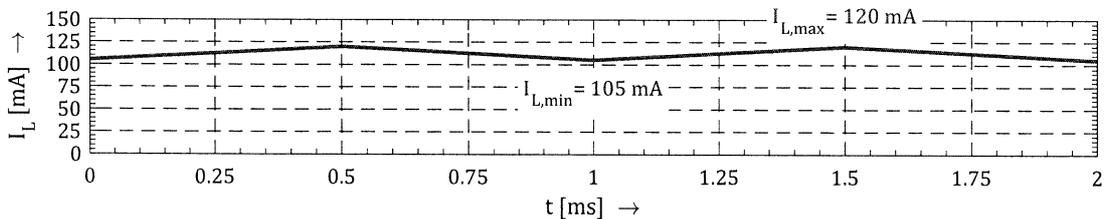
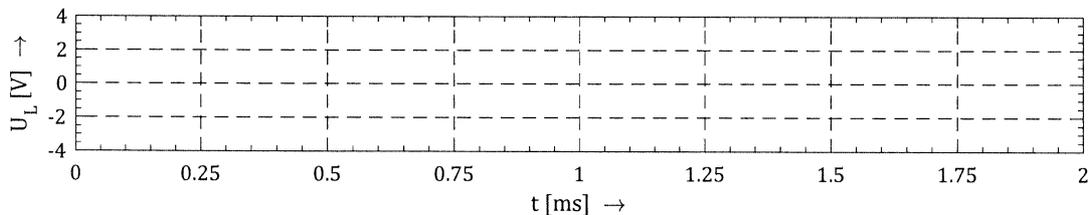
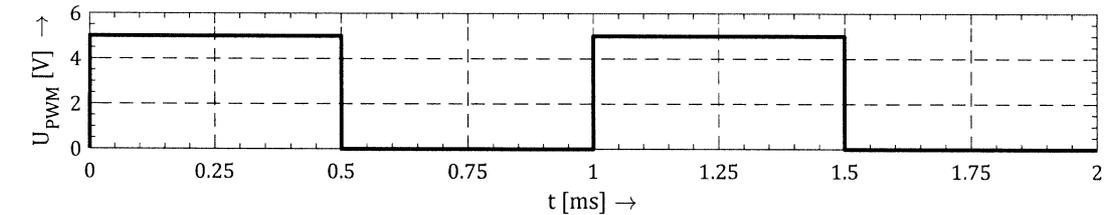
Tragen Sie

- < 0 oder
- = 0 oder
- > 0

für die beiden Betriebszustände des Transistors Q1 ein!

zu Aufgabe 2.3.3:

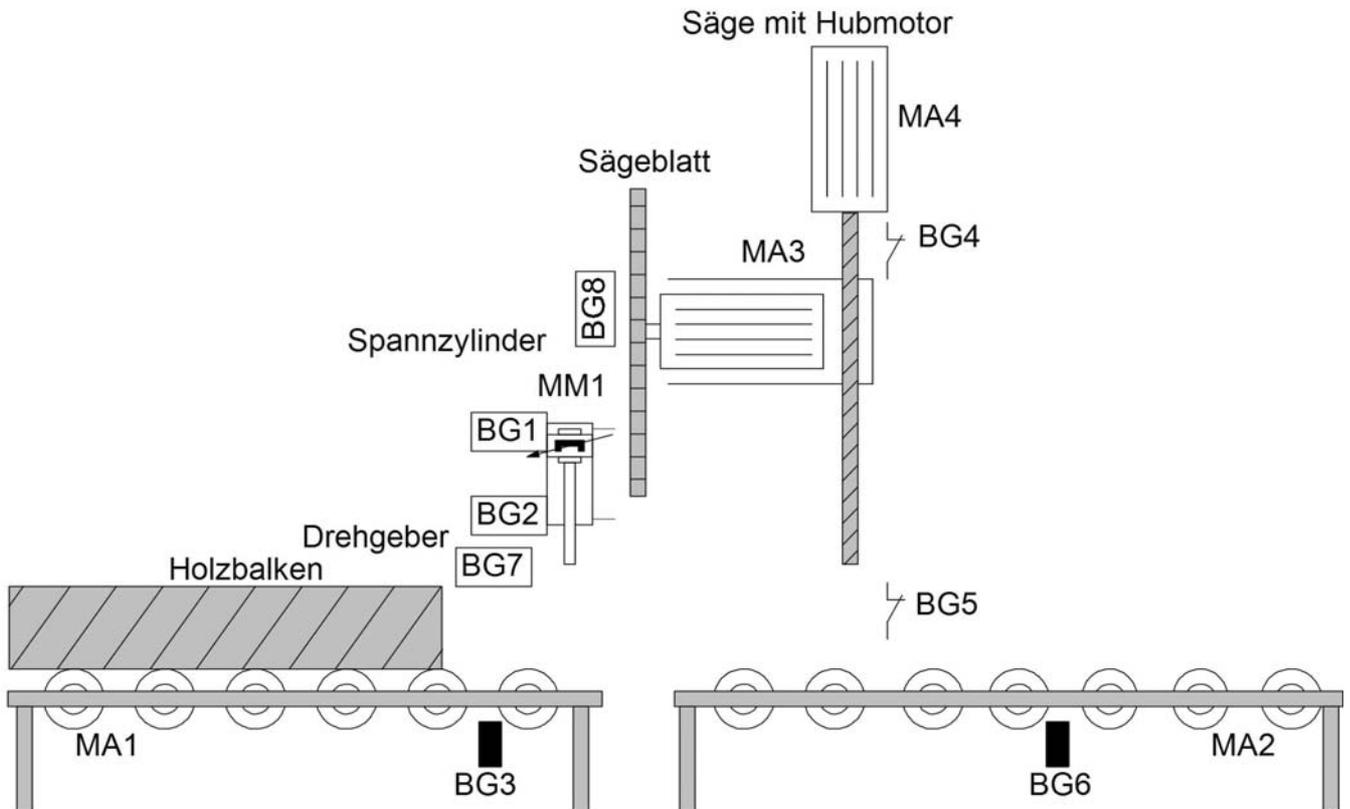
Zeitverläufe der Ströme und Spannungen in der Hochsetzstellerschaltung



Nachprüfung 2019/2020	Berufliches Gymnasium (TG)	
1.5.1	Mechatronik (Mechatronische Systeme)	
	Teil 3 (Wahlbereich)	Aufgabe 3 (4 Seiten)

3 Säge einer Fertighausfirma

Technologieschema:



Eine Fertighausfirma sägt die Balken für die Decken, Böden und den Dachstuhl mit einer automatisierten Balkenzuschnittanlage beidseitig zu. Zu betrachten ist nur der Teilbereich der Anlage, der die Balken auf das endgültige Maß ablängt:

Zu Beginn sind der Spannzyylinder und die Säge in ihren oberen Endpositionen.

Erfasst der Sensor BG3 einen Holzbalken, werden die Einzugsrollen (MA1) angetrieben und der Balken in die Sägeeinheit befördert.

Erreicht der Balken den Drehgeber BG7, beginnt die Längenmessung. Ist die gewünschte Länge des Balkens erreicht, $LaengeOK=1$, wird der Motor MA1 abgeschaltet, der Spannzyylinder ausgefahren und der notwendige Spanndruck aufgebaut. Hat der Zylinder den Balken gespannt, wird der Motor der Säge gestartet.

Nach einer Wartezeit von 4 Sekunden für den Hochlauf des Sägenmotors MA3 wird der Motor MA4 auf Rechtslauf geschaltet, und die Säge wird über die Spindel abgesenkt.

Wird die untere Endposition BG5 erreicht, schaltet der Motor MA4 ab. Nach einer Wartezeit von 3 Sekunden wird Motor MA4 auf Linkslauf geschaltet und die Säge hebt sich wieder an.

Ist die Säge vollständig angehoben, stoppt der Motor MA3 der Säge, und der Spannzyylinder gibt den Balken wieder frei. Sobald der Spannzyylinder ganz eingefahren ist, schieben die Auswurfrollen (MA2) den auf Länge abgesägten Balken aus der Maschine. Der abgesägte Rest des Balkens fällt nach unten weg.

Ist die Lichtschranke BG6 wieder frei, stoppt MA2, und der Vorgang kann von neuem beginnen.

Nachprüfung 2019/2020	Berufliches Gymnasium (TG)	
1.5.1	Mechatronik (Mechatronische Systeme)	
	Teil 3 (Wahlbereich)	Aufgabe 3 (4 Seiten)

3.1 SPS Steuerung

Punkte

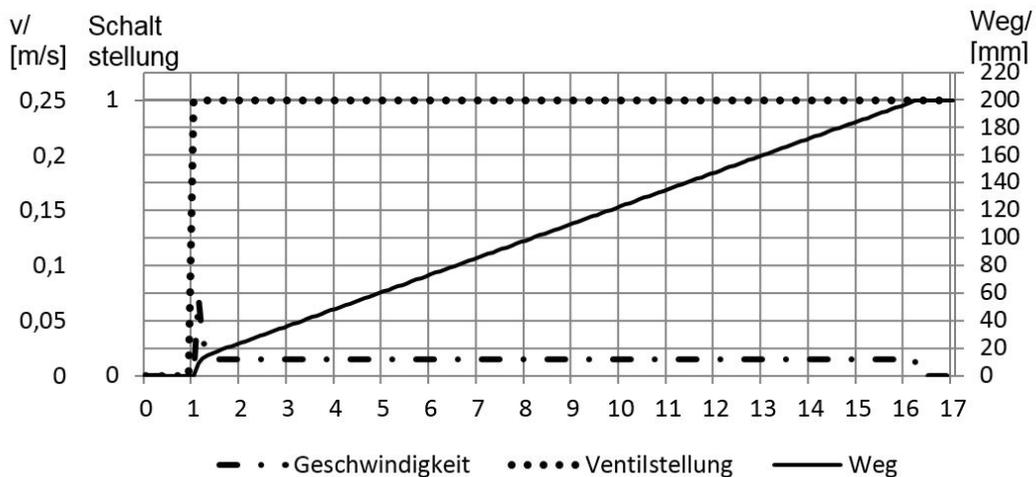
Zuordnungsliste

Logische Zuordnung		
Eingänge		
BG1	Spannzylinder MM1 eingefahren	BG1 = 1
BG2	Spannzylinder MM1 ausgefahren	BG2 = 1
BG3	Lichtschanke Einzugsseite Balken erkannt	BG3 = 1
BG4	Endposition Säge oben	BG4 = 0
BG5	Endposition Säge unten	BG5 = 0
BG6	Lichtschanke Auswurfseite	BG6 = 1
BG7	Drehgeber Balkenlänge	LaengeOK=1
BG8	Drucksensor Spanndruck erreicht	BG8 = 1
Ausgänge		
MB1	Ventil: Spannzylinder ausfahren (Balken spannen)	MB1 = 1
MB2	Ventil: Spannzylinder einfahren	MB2 = 1
QA1	Motor MA1 angetriebene Rollen, Balkeneinzug	QA1 = 1
QA2	Motor MA2 angetriebene Rollen, Balkenauswurf	QA2 = 1
QA3	Motor MA3 Säge	QA3 = 1
QA4	Spindelantrieb MA4 Rechtslauf, Säge senken	QA4 = 1
QA5	Spindelantrieb MA4 Linkslauf, Säge heben	QA5 = 1

- 3.1.1 Ergänzen Sie den graphischen Funktionsablaufplan für die Säge auf dem Arbeitsblatt (A3-4).
Die logischen Zuordnungen können Sie der Zuordnungsliste entnehmen.
Hinweis: Die Ablaufsteuerung kann auch mit einer anderen Anzahl an Schritten realisiert werden als auf dem Arbeitsblatt vorgegeben. 7
- 3.1.2 Entwerfen Sie die Netzwerke für die Ansteuerung der Ausgänge QA3 und QA5 inklusive der zugehörigen Schritte 6
- 3.1.3 Beim Sensor BG8 handelt es sich um einen Drucksensor. Erläutern Sie ein mögliches Messprinzip und geben Sie die benötigte Art des Ausgangssignals des Sensors an. 2
- 3.2 Elektropneumatische Steuerung**
- 3.2.1 Die Ausfahrgeschwindigkeit des Spannzylinders soll einstellbar sein. Skizzieren Sie den Pneumatikplan des vorliegenden Anlagenschemas. Begründen Sie Ihre Lösung.
Erklären Sie die Bedeutung des Pfeils an diesem Zylinder. 3
- 3.2.2 Die Spannkraft des Zylinder soll 1000 N betragen bei einem Anlagendruck von 5 bar. Es ist von 9 % an Verlusten auszugehen. Das Eigengewicht des Zylinders und der evtl. Spannbacken sollen nicht berücksichtigt werden.
- 3.2.2.1 Berechnen Sie die erforderlichen Zylinderdurchmesser und wählen Sie einen geeigneten Normzylinder aus. 3
- 3.2.2.2 Berechnen Sie den Systemdruck, der bei Ihrem gewählten Zylinder mindestens notwendig ist, um die erforderlichen Spannkraft zu erreichen. 1

Nachprüfung 2019/2020	Berufliches Gymnasium (TG)	
1.5.1	Mechatronik (Mechatronische Systeme)	
	Teil 3 (Wahlbereich)	Aufgabe 3 (4 Seiten)

- | | | |
|---------|---|-------------|
| 3.2.2.3 | Bestimmen Sie das Einsparpotential pro Woche, welches sich ergeben wird, wenn anstatt der 5 bar Systemdruck mit dem von Ihnen bestimmten notwendigen Systemdruck gefahren wird. Gehen Sie von einer 40-Stundenwoche aus, in der im Schnitt in der Minute 2 Balken abgesägt werden. Legen Sie einen Kolbenhub von 200 mm zu Grunde. Die Kosten für die Druckluftherzeugung belaufen sich auf 0,15€/m³. | Punkte
2 |
| 3.2.3 | Messungen ergaben, dass der tatsächliche Luftverbrauch 18 % höher ist als der errechnete. Beschreiben (Analysieren?) Sie zwei mögliche Ursachen. | 2 |
| 3.2.4 | Das Diagramm zeigt den Weg und die Geschwindigkeit des Zylinders 1M1 beim Ausfahren, sowie das zugehörige Stellglied, dargestellt über der Zeit in Sekunden. | |



- | | | |
|---------|--|---|
| 3.2.4.1 | Erläutern Sie die Verläufe der Größen im Diagramm | 2 |
| 3.2.4.2 | Beschreiben Sie, wie sich die Größen im Diagramm ändern, wenn ein Balken gespannt wird. | 1 |
| 3.2.4.3 | Die Drossel für die Ausfahrgeschwindigkeit wird verstellt. Begründen Sie die Auswirkungen auf die Größen im Diagramm | 1 |

30

Zu- und Vorname:

Schulnummer	Schülernummer

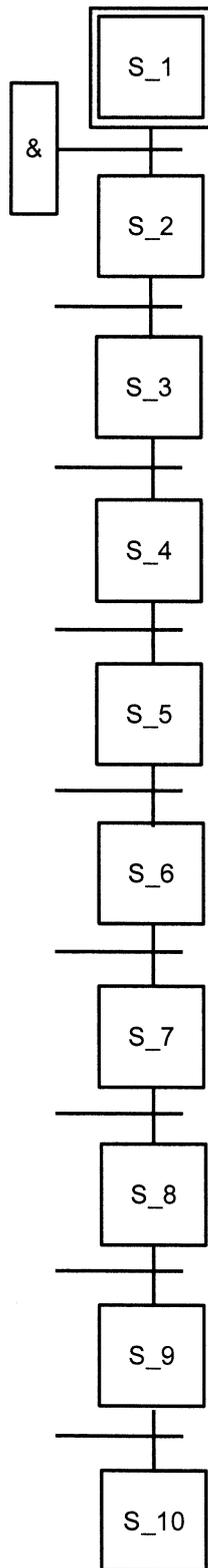
Nachprüfung 2019/2020	Mechatronik (Mechatron. Systeme)
1.5.1 Arbeitsblatt	Teil 3 (Wahlbereich) Aufgabe 3



			Schulnummer	Schülernummer
Nachprüfung 2019/2020	Mechatronik (Mechatron. Systeme)			
1.5.1 Arbeitsblatt	Teil 3 (Wahlbereich)	Aufgabe 3 (4 Seiten)		

Arbeitsblatt

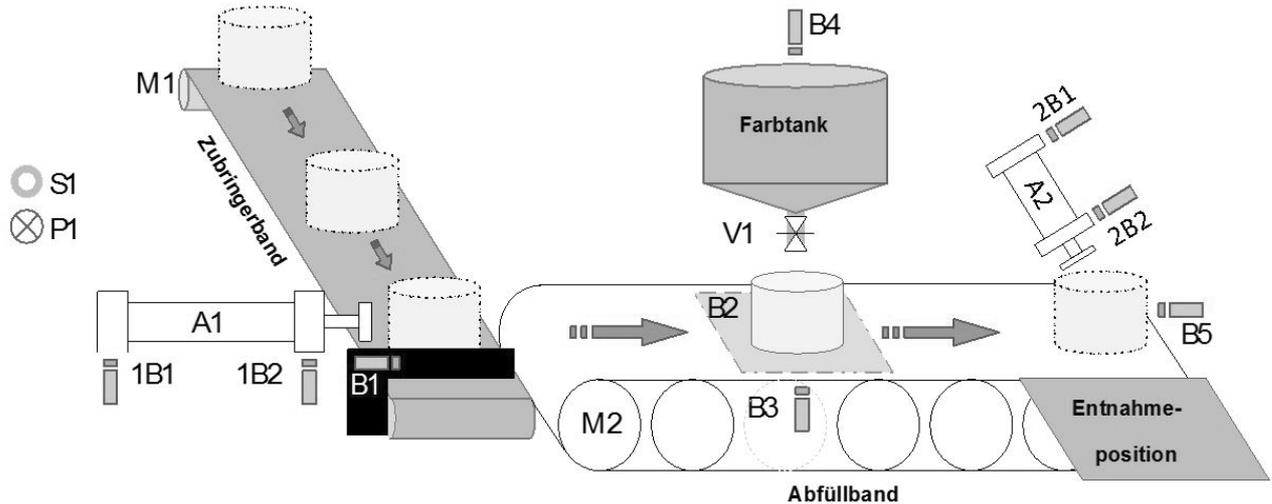
Zu Aufgabe 3.1.1



Nachprüfung 2019/2020	Berufliches Gymnasium (TG)	
1.5.1	Mechatronik (Mechatronische Systeme)	
	Teil 3 (Wahlbereich)	Aufgabe 4 (3 Seiten)

4 Füllanlage für Farbeimer

Die dargestellte Anlage befüllt Farbeimer. Die Steuerung der Anlage erfolgt über die Teilprozesse (Unterbausteine) „Bereitstellung von leeren Farbeimern“, „Gewichtsauswertung“ und „Abfüllvorgang“.



Funktionsbeschreibung Teilprozess „Abfüllvorgang“

Sind die beiden Zylinder eingefahren, ist kein Eimer auf dem Abfüllband, ist der Farbtank ausreichend befüllt und meldet Sensor B1 einen leeren Farbeimer in Position, kann der Abfüllvorgang durch Betätigen des Tasters S1 gestartet werden.

Das Zubringerband (gesteuert von einem anderen Prozess) soll bereits vor dem Starten des Abfüllvorgangs dafür sorgen, dass ein leerer Eimer (diese sind auf dem Zubringerband gegen seitliches Herabfallen gesichert) vor den Zylinder A1 transportiert wird.

Nach Betätigen des Tasters S1 schiebt Zylinder A1 den leeren Eimer auf das stillstehende Abfüllband. Ist der Zylinder A1 vollständig ausgefahren, fährt dieser sofort wieder ein. Eine Sekunde nachdem Zylinder A1 seine vordere Endlage verlassen hat, startet das Abfüllband.

Erreicht der leere Eimer die Abfüllposition unter dem Farbtank, stoppt das Abfüllband wieder, das Ventil V1 öffnet und der Eimer wird befüllt.

Der Sensor B2 wertet das Gewicht der Farbeimer aus. Wird die gewünschte Farbmenge erreicht, ändert die Variable „Gewicht_iO“ ihren Zustand auf den Wert „TRUE“. Der Eimer wird jetzt nicht mehr weiter befüllt.

Das Abfüllband transportiert den befüllten Eimer bis an sein Bandende. Anschließend schiebt der Zylinder A2 den Farbeimer auf die Entnahmeposition und fährt nach Erreichen der vorderen Endlage sofort wieder ein. Während des gesamten Abfüllvorgangs soll die Meldeleuchte P1 leuchten.

Damit ist der Abfüllvorgang für einen Eimer beendet. Er kann dann von Hand von der Entnahmeposition entnommen werden.

Nachprüfung 2019/2020	Berufliches Gymnasium (TG)	
1.5.1	Mechatronik (Mechatronische Systeme)	
	Teil 3 (Wahlbereich)	Aufgabe 4 (3 Seiten)

Speicherprogrammierbare Steuerung (SPS)

Punkte

Zuordnungsliste:

Eingänge	Logische Zuordnung	
S1	Taster: Abfüllvorgang wird gestartet	S1 = 1
1B1	Zylinder A1 ist eingefahren	1B1 = 1
1B2	Zylinder A1 ist ausgefahren	1B2 = 1
2B1	Zylinder A2 ist eingefahren	2B1 = 1
2B2	Zylinder A2 ist ausgefahren	2B2 = 1
B1	Leerer Eimer ist vor Zylinder A1	B1 = 0
B2	Farbmenge im Farbeimer erreicht	Gewicht_iO = 1
B3	Leerer Eimer ist unter dem Farbtank	B3 = 0
B4	Farbe im Farbtank vorhanden	B4 = 1
B5	Befüllter Eimer ist vor Zylinder A2	B5 = 0
Ausgänge		
Q2	Schütz: Motor M2 treibt das Abfüllband an	Q2 = 1
V1	Ventil öffnet den Verschluss des Farbtanks	V1 = 1
1M1	Federrückgestelltes Magnetventil, Zylinder A1 ausfahren	1M1 = 1
2M1	Federrückgestelltes Magnetventil, Zylinder A2 ausfahren	2M1 = 1
P1	Meldeleuchte: Abfüllvorgang aktiv	P1 = 1

Die Abfüllanlage soll mit einer speicherprogrammierbaren Steuerung (SPS) gesteuert werden.

4.1 Ablaufsteuerung

4.1.1 Entwickeln Sie für den beschriebenen Teilprozess „Abfüllvorgang“ den Funktionsablaufplan nach IEC 61131-3. (Verwenden Sie die Schrittbezeichnung S_1, S_2, usw.)

6

4.1.2 Erstellen Sie mit Hilfe ihres Funktionsablaufplans die Netzwerke für die Ansteuerung des Aktors Q2 (Motor Abfüllband) und der Meldeleuchte P1.
Hinweis: Die Schrittspeicher für die Netzwerke können als gegeben vorausgesetzt werden!

3

Ein SPS-Programm wird zyklisch durchlaufen und ist optimaler Weise in einzelne Teilprogramme aufgeteilt. Der Hauptbaustein ruft die Bausteine für die einzelnen Teilprozesse auf.

4.1.3 Skizzieren Sie ein Blockschaltbild, welches die einzelnen Teilprozesse darstellt und die Verzweigung aus dem Hauptprogramm in logischer Reihenfolge beinhaltet.

3

Die Erfassung der Füllhöhe im Farbtank wird mittels eines analogen Sensors realisiert.

4.1.4 Beschreiben Sie kurz (auch mithilfe einer Skizze) die grundlegenden Unterschiede von analogen und binären Signalen.

2

4.1.5 Erläutern Sie in den Unterschied zwischen lokalen und globalen Variablen.

2

Nachprüfung 2019/2020	Berufliches Gymnasium (TG)	
1.5.1	Mechatronik (Mechatronische Systeme)	
	Teil 3 (Wahlbereich)	Aufgabe 4 (3 Seiten)

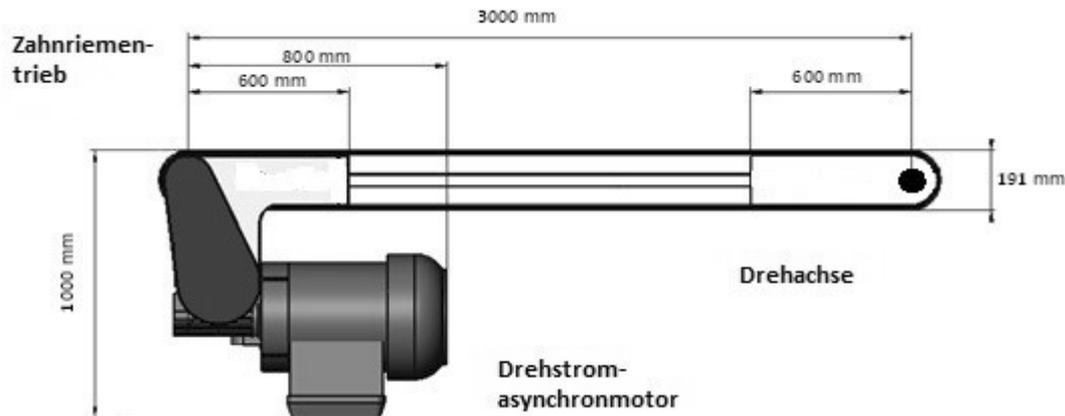
Antrieb mit Drehstromasynchronmotor (DASM)

Punkte

4.2 Das Abfüllband wird von einem Drehstromasynchronmotor (DASM) über einen Zahnriementrieb angetrieben. Es soll sich mit einer Geschwindigkeit von 2 m/s bewegen.

4.2.1 Berechnen Sie mit Hilfe der nachfolgenden Abbildung die hierfür notwendige Drehzahl der Drehachse in Umdrehungen pro Minute.

2,5



Im sich einstellenden Arbeitspunkt hat der DASM eine Drehzahl von 1395 min⁻¹.

4.2.2 Berechnen Sie das Übersetzungsverhältnis des Zahnriementriebs.

1,5

Die befüllten Farbeimer auf dem Abfüllband belasten den Drehstromasynchronmotor mit einem Lastmoment von 45 Nm auf der Abtriebsseite des Getriebes. Der Wirkungsgrad des Getriebes beträgt 0,95 und das Übersetzungsverhältnis ist auf $i = 7$ festgelegt.

4.2.3 Ermitteln Sie durch Berechnung aus dem unten abgebildeten Ausschnitt einer Normtabelle einen geeigneten Motor (Bemessungsleistung P_N).

3

DASM Typen				
P_N [kW]	n_N [min ⁻¹]	I_N bei 400 V [A]	$\cos \varphi_1$	M_A/M_N
0,55	1375	1,52	0,73	1,90
0,75	1375	2,10	0,74	2,00
1,1	1375	2,81	0,74	2,30
1,5	1375	3,55	0,78	2,30

4.2.4 Berechnen Sie anhand der Daten ihres ausgewählten Motors den relativen Schlupf im Bemessungsbetrieb.

1

4.2.5 Erklären Sie den Unterschied zwischen dem Leistungsfaktor $\cos \varphi$ und dem Wirkungsgrad η .

3

Der Leistungsfaktor des DASM soll auf $\cos \varphi_2 = 0,95$ verbessert werden.

4.2.6 Berechnen Sie die erforderliche Kapazität eines einzelnen Kompensationskondensators für den Fall, dass diese in Dreieck verschalten sind.

3

30